Travaux dirigés : Applications linéaires (Correction)
– Série II –

CORRECTION (EXERCICE 1)

1. Pour tout $u = (x_1, y_1)$ et $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{array}{rcl} p_1(u+v) & = & p_1(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ & = & (3(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)) \\ & = & (3x_1 + y_1 + 3x_2 + y_2, x_1 - y_1 + x_2 - y_2) \\ & = & (3x_1 + y_1, x_1 - y_1) + (3x_2 + y_2, x_2 - y_2) \\ & = & p_1(u) + p_1(v) \end{array}$$

Pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{array}{rcl} p_1(\lambda u) & = & p_1(\lambda x, \lambda y) \\ & = & (3\lambda x + \lambda y, \lambda x - \lambda y) \\ & = & \lambda(3x + y, x - y) \\ & = & \lambda p_1(u) \end{array}$$

Donc p_1 est une application linéaire

2. p_2 est une application linéaire si $\forall u, v \in \mathbb{R}^2$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$p_2(u+v) = p_2(u) + p_2(v) \quad \text{et} \quad p_2(\lambda u) = \lambda p_2(u)$$

Or pour $u = (3, 3)$ et $v = (1, 1)$, on a :

$$\begin{array}{rcl} p_2(u) & = & p_2(3,3) = 3^2 + 3^2 = 18 \\ p_2(v) & = & p_2(1,1) = 1^2 + 1^2 = 2 \\ p_2(u+v) & = & p(4,4) = 4^2 + 4^2 = 32 \end{array}$$

On obtient

$$p_2(u) + p_2(v) = p_2(3,3) + p_2(1,1) = 18 + 2 = 20 \neq p_2(u+v) = p_2(4,4) = 32$$

Par conséquent p_2 n'est une application linéaire.

Remarque : p_2 n'est pas linéaire car $x^2 + y^2$ n'est pas sous forme de $ax + by$

3. Pour tout $u = (x_1, y_1, z_1)$ et $v = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{array}{rcl} p_3(u+v) & = & p_3(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ & = & ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), (x_1 + x_2) - (z_1 + z_2), (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2)) \\ & = & (x_1 + y_1 + x_2 + y_2, x_1 - z_1 + x_2 - z_2, x_1 + y_1 + z_1 + x_2 + y_2 + z_2) \\ & = & (x_1 + y_1, x_1 - z_1, x_1 + y_1 + z_1) + (x_2 + y_2, x_2 - z_2, x_2 + y_2 + z_2) \\ & = & p_3(u) + p_3(v) \end{array}$$

Pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{array}{rcl} p_3(\lambda u) & = & p_3(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ & = & (\lambda x + \lambda y, \lambda x - \lambda z, \lambda x + \lambda y + \lambda z) \\ & = & \lambda(x + y, x - z, x + y + z) \\ & = & \lambda p_3(u) \end{array}$$

Donc p_3 est une application linéaire

4. L'application p_4 n'est pas une application linéaire car pour $u = (1,1)$ et $v = (2,2)$, on a :

$$\begin{array}{rcl} p_4(u) & = & p_4(1,1) = (2,1,1) \\ p_4(v) & = & p_4(2,2) = (4,2,4) \\ p_4(u+v) & = & p_4(3,3) = (6,3,9) \end{array}$$

Donc

$$p_4(u) + p_4(v) \quad = \quad (2,1,1) + (4,2,4) = (6,3,5) \neq p_4(u+v) = (6,3,9)$$

Par conséquent p_4 n'est pas linéaire.

Remarque : p_4 n'est pas linéaire car la composante xy n'est pas sous forme de $ax + by$

CORRECTION (EXERCICE 2)

1. (a) Le noyau de p :

$$\begin{array}{rcl} \forall u = (x,y) \in ker(p) & \Leftrightarrow & p(x,y) = (0,0) \\ & \Leftrightarrow & (x-2y, 4x-8y) = (0,0) \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} x-2y & = & 0 \\ 4x-8y & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & x = 2y \\ & \Leftrightarrow & u = (2y,y) = y(2,1) \end{array}$$

Ce qui implique que $ker(p) = Vect\{(2,1)\} = \{\lambda(2,1) | \lambda \in \mathbb{R}\}$,
donc p n'est pas injective car $ker(p) \neq \{(0,0)\}$.

(b) Une application p est surjective si $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(a,b) = p(x,y)$.
Pour $(a,b) = (1,0)$, cherchons (x,y) tel que $p(x,y) = (1,0)$

$$\begin{array}{rcl} p(x,y) = (1,0) & \Leftrightarrow & (x-2y, 4x-8y) = (1,0) \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} x-2y & = & 1 \\ 4x-8y & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} x-2y & = & 1 \\ x-2y & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & 1 \\ x & = & 2y \end{array} \right. \quad \text{Impossible} \end{array}$$

Donc p n'est pas surjective.

2. (a) On a $ker(p) = Vect\{(2,1)\}$, le vecteur $(2,1)$ est non nul donc c'est une base du $ker(p)$.

(b)*Rappel : Soient E et F deux espaces vectoriels et p est une application linéaire de E vers F. $Im(p)$ est un sous espace vectoriel de F engendré par l'image d'une base quelconque de E.*

On considère $B_2 = \{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ avec $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$ (on a $E = \mathbb{R}^2$).

$$\begin{array}{rcl} p(e_1) & = & (1,4) \\ p(e_2) & = & (-2,-8) \end{array}$$

$Im(p) = Vect\{p(e_1), p(e_2)\} = Vect\{(1,4); (-2,-8)\}$.
D'autre part $p(e_2) = -2p(e_1)$, ces deux vecteurs sont liés, et $p(e_1)$ est non nul.
Donc $Im(p) = Vect\{(1,4)\} = \{\lambda(1,4) | \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $\{(1,4)\}$ est une base de $Im(p)$.

CORRECTION (EXERCICE 3)

1. (a) Déterminons le noyau de p_1 :

$$\begin{array}{rcl} (x,y) \in ker(p_1) & \Leftrightarrow & p_1(x,y) = (0,0) \\ & \Leftrightarrow & (3x+y, x-y) = (0,0) \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} 3x+y & = & 0 \\ x-y & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} 4y & = & 0 \\ x & = & y \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & x = y = 0 \end{array}$$

On en déduit que $ker(p_1) = \{(0,0)\}$, et donc p_1 est injective.

(b) *Méthode 1* : Quels sont les éléments $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ qu'on peut écrire sous forme $(a,b) = p_1(x,y)$?

$$\begin{array}{rcl} p_1(x,y) = (a,b) & \Leftrightarrow & (3x+y, x-y) = (a,b) \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} 3x+y & = & a \\ x-y & = & b \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} 3x+y & = & a \\ x-y & = & b \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{a+b}{4} \\ y & = & \frac{a-b}{2} \end{array} \right. \end{array}$$

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, il existe un antécédent $(x,y) = (\frac{a+b}{4}, \frac{a-b}{2}) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(a,b) = p_1(x,y)$. Donc $Im(p_1) = \mathbb{R}^2$. Ainsi p_1 est surjective.

Méthode 2 : Soit $B_2 = \{e_1, e_2\}$, la base canonique de l'ensemble de départ $\mathbb{R}^2$, avec $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$. L'image de la base $\{p_1(e_1), p_2(e_2)\}$ est une famille génératrice de $Im(p_1)$. On a :

$$\begin{array}{rcl} p_1(e_1) & = & p_2(1,0) = (3,1) \\ p_1(e_2) & = & p_2(e_2) = (1,1) \end{array}$$

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 p_1(e_1) + \lambda_2 p_1(e_2) = 0_3$

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 p_2(e_1) + \lambda_2 p_2(e_2) = 0_2 & \Leftrightarrow & \lambda_1(3,1) + \lambda_2(1,1) = (0,0) \\ & \Leftrightarrow & (3\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2) = (0,0,0) \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} 3\lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \lambda_2 = \lambda_1 = 0 \end{array}$$

Alors le système $\{p_2(e_1), p_2(e_2)\}$ est libre et par conséquent c'est une base de $Im(p_2)$.
Donc

$$Im(p_2) = Vect\{p_2(e_1), p_2(e_2)\} = Vect\{(3,1),(1,1)\} = \{\lambda(3,1) + \mu(1,1) | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

On a $Im(p_2) = \mathbb{R}^2$, donc p_2 est surjective.

(c) On a alors p_1 est injective et surjective, donc p_1 est bijective.

2. (a) Déterminons le noyau de p_2 :

$$\begin{array}{rcl} (x,y) \in ker(p_2) & \Leftrightarrow & p_2(x,y) = (0,0,0) \\ & \Leftrightarrow & (y, x-5y, x+y) = (0,0,0) \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ x-5y & = & 0 \\ x+y & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & x = y = 0 \end{array}$$

On en déduit que $ker(p_2) = \{(0,0)\}$, et que p_2 est injective.

(b) Soit $B_2 = \{e_1, e_2\}$, la base canonique de l'ensemble de départ $\mathbb{R}^2$, avec $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$. L'image de la base $\{p_2(e_1), p_2(e_2)\}$ est une famille génératrice de $Im(p_2)$. On a :

$$\begin{array}{rcl} p_2(e_1) & = & p_2(1,0) = (0,1,1) \\ p_2(e_2) & = & p_2(e_2) = (1,-5,1) \end{array}$$

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 p_2(e_1) + \lambda_2 p_2(e_2) = 0_3$

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 p_2(e_1) + \lambda_2 p_2(e_2) = 0_3 & \Leftrightarrow & \lambda_1(0,1,1) + \lambda_2(1,-5,1) = (0,0,0) \\ & \Leftrightarrow & (\lambda_2, \lambda_1 - 5\lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2) = (0,0,0) \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 - 5\lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \lambda_2 = \lambda_1 = 0 \end{array}$$

Alors le système $\{p_2(e_1), p_2(e_2)\}$ est libre et par conséquent c'est une base de $Im(p_2)$.
Donc

$$Im(p_2) = Vect\{p_2(e_1), p_2(e_2)\} = Vect\{(0,1,1), (1,-5,1)\} = \{\lambda(0,1,1) + \mu(1,-5,1) | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

On a $dim\ Im(p_2) = 2 < dim\ \mathbb{R}^3 = 3$, donc p_2 n'est pas surjective.

(c)L'application p_2 n'est pas surjective donc elle n'est pas bijective.

3. (a) Déterminons le noyau de p_3

$$\begin{array}{rcl} u = (x,y,z) \in ker(p_2) & \Leftrightarrow & p_3(x,y,z) = (0,0,0) \\ & \Leftrightarrow & (2x + 2y - z, 2x + y, y - z) = (0,0,0) \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{lcll} 2x + 2y - z & = & 0 & (L_1) \\ 2x + y & = & 0 & (L_2) \\ y - z & = & 0 & (L_3) \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{lcll} x & = & -\frac{y}{2} & (L_2) \\ z & = & y & (L_3) \\ -y + 2y - y & = & 0 & (L_1) \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -\frac{y}{2} \\ z & = & y \\ 0 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & u = (x,y,z) = (-\dfrac{y}{2}, y, y) = y(-\dfrac{1}{2}, 1, 1) \\ & \Leftrightarrow & u = (x,y,z) \in \text{Vect}(-\dfrac{1}{2}, 1, 1) = \{\lambda(-\dfrac{1}{2}, 1, 1) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

On en déduit que $Ker(p_3) = \text{Vect}(-\frac{1}{2}, 1, 1)$, et que p_3 n'est pas injective.

b) *Méthode 1* : Soit $B_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$, la base canonique de l'ensemble de départ $\mathbb{R}^3$, avec $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. L'image de B_3 par p_3 est $\{p_3(e_1), p_3(e_2), p_3(e_3)\}$ est famille génératrice de $Im(p_3)$. On a :

$$\begin{array}{rcl} p_3(e_1) & = & p_3(1,0,0) = (2,2,0) \\ p_3(e_2) & = & p_3(0,1,0) = (2,1,1) \\ p_3(e_3) & = & p_3(0,1,0) = (-1,0,-1) \end{array}$$

Étudions la dépendance de la famille $\{p_3(e_1), p_3(e_2), p_3(e_3)\}$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 p_3(e_1) + \lambda_2 p_3(e_2) + \lambda_3 p_3(e_3) = 0_3$

$$\begin{aligned}
\lambda_1 p_2(e_1) + \lambda_2 p_2(e_2) + \lambda_3 p_2(e_3) = 0_3 &\Leftrightarrow \lambda_1(2,2,0) + \lambda_2(2,1,1) + \lambda_3(-1,0,-1) = (0,0,0) \\
&\Leftrightarrow (2\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3, 2\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3) = (0,0,0) \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & = & -\frac{1}{2}\lambda_2 \\ \lambda_3 & = & \lambda_2 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} 0 & = & 0 \\ \lambda_1 & = & -\frac{1}{2}\lambda_2 \\ \lambda_3 & = & \lambda_2 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Donc la famille $\{p_3(e_1), p_3(e_2), p_3(e_3)\}$ est lié, on élimine $p_3(e_2)$ et étudions la dépendance de $\{p_3(e_1), p_3(e_2)\}$. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 p_2(e_1) + \lambda_2 p_3(e_2) = 0_3$

$$\begin{aligned}
\lambda_1 p_2(e_1) + \lambda_2 p_2(e_2) = 0_3 &\Leftrightarrow \lambda_1(2,2,0) + \lambda_2(2,1,1) = (0,0,0) \\
&\Leftrightarrow (2\lambda_1 + 2\lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2) = (0,0,0) \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 & = & 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_1 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $\{p_3(e_1), p_3(e_2)\}$ est libre est par conséquent c'est une base de $Im(p_3)$ et

$$Im(p_3) = Vect\{(2,2,0);(2,1,1)\} = \{\lambda(2,2,0) + \mu(2,1,1) | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

D'autre part $dimIm(p_3) = 2 < dim\ \mathbb{R}^3 = 3$, donc p_3 n'est pas surjective.

Méthode 2 : On a $Ker(p_3) = Vect(-1,1,1)$ donc $dimKer(p_3) = 1$. D'après la formule du rang, on a

$$dim\ Ker(p_3) + dim\ Im(p_3) = dim\ \mathbb{R}^3 = 3,\ \Rightarrow dim\ Im(p_3) = 3 - 1 = 2$$

On va chercher une base de $Im(p_3)$. Il suffit donc de trouver deux vecteurs de $Im(p_3)$ qui sont linéairement indépendants. Prenons par exemple $u_1 = p_3(1,0,0) = (2,2,0) \in Im(p_3)$ et $u_2 = p_3(0,1,0) = (2,1,1) \in Im(p_3)$.
Par construction ces vecteurs sont dans l'image de p_3 et ils sont linéairement indépendants. Donc u_1, u_2 est une base de $Im\ p_3$ et

$$Im(p_3) = Vect\{(2,2,0);(2,1,1)\} = \{\lambda(2,2,0) + \mu(2,1,1) | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

D'autre part $dimIm(p_3) < dim\ \mathbb{R}^3$, donc p_3 n'est pas surjective.

Remarque : $Im(p_3)$ n'admet pas qu'une seule base mais une infinité de bases. Donc on aurait pu prendre la famille libre $\{p_3(1,0,0), p_3(0,0,1)\} = \{(2,2,0);(-1,0,-1)\}$ comme base de $Im(p_3)$ ou encore $\{p_3(0,1,0), p_3(0,0,1)\} = \{(2,1,1);(-1,0,-1)\}$

(c) L'application p_3 n'est pas surjective donc elle n'est pas p_3 n'est pas bijective.

CORRECTION (EXERCICE 4)

1. (a) Le noyau de p :

$$\begin{aligned}
u=(x,y,z)\in ker(p) &\Leftrightarrow p(x,y,z)=(0,0,0)\\
&\Leftrightarrow (-x+2y+2z,-x+z,-x+2y+2z)=(0,0,0)\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcll} -x+2y+2z &=& 0 & (L_1)\\ -x+z &=& 0 & (L_2)\\ -x+2y+2z &=& 0 & (L_3)\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcll} -x+2y+2z &=& 0 & (L_1=L_3)\\ x &=& z & \end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} y &=& -\frac{z}{2}\\ x &=& z\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Alors $u=(z,-\frac{z}{2},z)=-\frac{z}{2}(2,-1,2)$
Donc $ker(p)=Vect\{(2,-1,2)\}\{\lambda(2,-1,2)|\lambda\in\mathbb{R}\}$ et $\{(2,-1,2)\}$ est une base de $ker(p)$.

(b) D'après le théorème du rang,

$$dim(ker(p))+dim(Im(p))=dim(\mathbb{R}^3\Leftrightarrow dim(Im(p))=dim(\mathbb{R}^3-dim(ker(p))=3-1=2$$

$$\begin{aligned}
p(e_1) &= p(1,0,0)=(-1,-1,-1)\\
p(e_2) &= p(0,1,0)=(2,0,2)
\end{aligned}$$

$DimIm(p)=2$ et les deux vecteurs $p(e_1)$ et $p(e_2)$ ne sont pas proportionnels, donc ils sont libres et par conséquent $\{p(e_1),p(e_2)\}$ est une base de $Im(p)$.

2. D'après 1) on a $\{u\}=\{(2,-1,2)\}$ est une base de $ker(p)$ et $\{p(e_1),p(e_)\}$ est une base de $Im(p)$. Si $\{u,p(e_1),p(e_2)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, alors on a $ker(p)\oplus Im(p)=\mathbb{R}^3$.
Soient $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned}
\alpha u+\beta p(e_1)+\gamma p(e_2)=0_3 &\Leftrightarrow \alpha(2,-1,2)+\beta(-1,-1,-1)+\gamma(2,0,2)=(0,0,0)\\
&\Leftrightarrow (2\alpha-\beta+2\gamma,-\alpha-\beta,2\alpha-\beta+2\gamma)=(0,0,0)\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2\alpha-\beta+2\gamma &=& 0\\ -\alpha-\beta &=& 0\\ 2\alpha-\beta+2\gamma &=& 0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} -3\beta+2\gamma &=& 0\\ \alpha=-\beta &=& 0\\ -3\beta+2\gamma &=& 0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \gamma &=& \frac{3}{2}\beta\\ \alpha &=& -\beta\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que la famille $\{u,p(e_1),p(e_2)\}$ est liée et la relation qui relie entre ses vecteurs est

$$\text{pour } \beta \text{ quelconque : } -\beta u+\beta p(e_1)+\frac{3}{2}\beta p(e_2)=0_3\Leftrightarrow -u+p(e_1)+\frac{3}{2}p(e_2)=0_3$$

Donc la famille $\{u,p(e_1),p(e_2)\}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$ et par conséquent

$$ker(p)\oplus Im(p)\neq\mathbb{R}^3$$

Travaux dirigés : Calcul Matriciel (Correction)
– Série III –

CORRECTION (EXERCICE 1)

1. Calculons $7B + 5C$ et $6B - 4C$:

$$\begin{aligned}
7B + 5C &= 7\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 1 & -6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 49 & 21 \\ -35 & 28 \\ 42 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 45 & 10 \\ 5 & -30 \\ 20 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 94 & 31 \\ -30 & -2 \\ 62 & 7 \end{pmatrix} \\
6B - 4C &= 6\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 1 & -6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 42 & 18 \\ -30 & 24 \\ 36 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 36 & 8 \\ 4 & -24 \\ 16 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ -34 & 48 \\ 20 & 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2. Les produits matriciels possibles sont : $B.A$, $C.A$, $D.B$ et $D.C$

$$\begin{aligned}
B.A &= \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -14 & 34 \\ -33 & -12 \\ -1 & 26 \end{pmatrix} \\
C.A &= \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 1 & -6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -5 & 40 \\ 43 & -8 \\ 4 & 16 \end{pmatrix} \\
D.B &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -6 & 3 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 4 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 35 & 21 \\ 55 & -18 \\ 81 & 33 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D.C &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -6 & 3 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 1 & -6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 45 & -6 \\ 15 & 38 \\ 93 & 10 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

CORRECTION (EXERCICE 2)

1. La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -3 & 0 & c \\ d & 2 & e \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure si et seulement si $\forall i < j, \quad a_{i,j} = 0$, c'est-à-dire les éléments en dessus de la diagonale sont nuls.
   Donc $b = 0$ et $c = 0$ et les valeurs a, d et e peuvent prendre n'importe quelle valeur.
2. La matrice A est symétrique si et seulement si ${}^tA = A$, c'est-à-dire $a_{ij} = a_{ji}\ \forall i, j$.

$$
\begin{aligned}
& {}^tA = A \\
\Leftrightarrow\ & \begin{pmatrix} a & -3 & d \\ b & 0 & 2 \\ 0 & c & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -3 & 0 & c \\ d & 2 & e \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & b = -3, c = 2, d = 0.
\end{aligned}
$$

   Donc A est symétrique si $b = -3$, $c = 2$ et $d = 0$. Les constantes a et e peuvent prendre n'importe quelle valeur.
3. La matrice A est antisymétrique si et seulement si ${}^tA = -A$, c'est-à-dire $a_{ji} = -a_{ij}\ \forall i, j$,

$$
\begin{aligned}
& {}^tA = -A \\
\Leftrightarrow\ & \begin{pmatrix} a & -3 & d \\ b & 0 & 2 \\ 0 & c & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & 0 \\ 3 & 0 & -c \\ -d & -2 & -e \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow\ & a = -a,\ b = 3,\ d = 0,\ c = -2,\ e = -e. \\
\Leftrightarrow\ & a = 0,\ b = 3,\ d = 0,\ c = -2,\ e = 0.
\end{aligned}
$$

   Donc A est antisymétrique si $a = 0,\ b = 3,\ d = 0,\ c = -2,\ e = 0$.

CORRECTION (EXERCICE 3)

1. — Calculons le déterminant de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 - 5 \times 2 = 12 - 10 = 2 \neq 0$$

   Donc A est inversible.

   — Calculons le déterminant de B

$$
\begin{aligned}
|B| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 1 \times 1 - 1 \times (-1) + 2 \times (-3) = -4 \neq 0
\end{aligned}
$$

   Donc B est inversible.

   — Calculons le déterminant C

$$
\begin{aligned}
|C| &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -4 & 5 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} \\
&= 1 \times 4 - 5 \times 6 + 7 \times 2 = -12 \neq 0
\end{aligned}
$$

   Donc C est inversible.

— Calculons le déterminant D

$$\begin{aligned}
|D| &= \begin{vmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 5 & -4 & 5 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} \\
&= 1 \times (-9) - 5 \times 9 + 6 \times 9 = 0
\end{aligned}$$

Donc D n'est pas inversible car $|D| = 0$.

2. — Calculons la matrice inverse A

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= \frac{1}{|A|}{}^{t}com(A) \\
&= \frac{1}{2}{}^{t}\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

— Calculons la matrice inverse B

$$\begin{aligned}
B^{-1} &= \frac{1}{|B|}{}^{t}com(B) \\
&= \frac{1}{-4}{}^{t}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{-4}{}^{t}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

— Calculons la matrice inverse C

$$\begin{aligned}
|C| &= \frac{1}{|C|}{}^{t}com(C) \\
&= \frac{1}{-12}{}^{t}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{-12}{}^{t}\begin{pmatrix} 4 & -10 & -12 \\ -6 & -12 & -6 \\ 2 & 10 & 6 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{-12}\begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -10 & -12 & 10 \\ -12 & -6 & 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

— La matrice D n'est pas inversible, donc on ne peut pas calculer s matrice inverse.

CORRECTION (EXERCICE 4)

1. Méthode d'inversion :
   — Calculons la solution du système (S_1) à l'aide de la méthode d'inversion.
   L'écriture matricielle de (S_1) est

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3x+2y & = & 8 \\ 5x+4y & = & 5 \end{array}\right. \begin{array}{ll} \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & AX = L_1 \\ \Leftrightarrow & X = A^{-1}L_1 \end{array}$$

D'après l'exercice III, la matrice A est inversible et sa matrice inverse est $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$, donc

$$\begin{array}{rcl} X = A^{-1}L_1 & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{22}{2} \\ \frac{-25}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

S_1 admet une solution unique $\{(\frac{22}{2}, \frac{-25}{2})\}$.
   — Calculons la solution du système (S_2) à l'aide de la méthode d'inversion.
   L'écriture matricielle de (S_2) est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y+2z & = & -4 \\ x+2y+z & = & 6 \\ 2x+y+z & = & 7 \end{array}\right. \begin{array}{ll} \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & BX = L_2 \\ \Leftrightarrow & X = B^{-1}L_2 \end{array}$$

D'après l'exercice III, la matrice B est inversible et sa matrice inverse est $\frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

donc

$$\begin{array}{rcl} X = B^{-1}L_2 & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \dfrac{1}{-4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{4} \\ \frac{15}{4} \\ \frac{-25}{4} \end{pmatrix} \end{array}$$

S_2 admet une solution unique $\{(\frac{19}{4}, \frac{15}{4}, \frac{-25}{4})\}$.
   — Calculons la solution du (S_3) à l'aide de la méthode d'inversion.
   L'écriture matricielle du système (S_3) est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x-2y+3z & = & 1 \\ 5x-4y+5z & = & 3 \\ 7x-8y+9z & = & -2 \end{array}\right. \begin{array}{ll} \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -4 & 5 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & CX = L_3 \\ \Leftrightarrow & X = C^{-1}L_3 \end{array}$$

D'après l'exercice III, la matrice C est inversible et sa matrice inverse est $\frac{1}{-12}\begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -10 & -12 & 10 \\ -12 & -6 & 6 \end{pmatrix}$, donc

$$\begin{aligned} X = C^{-1}L_3 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{-12}\begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -10 & -12 & 10 \\ -12 & -6 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{18}{12} \\ \frac{66}{12} \\ \frac{42}{12} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

S_2 admet une solution unique $\{(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}, \frac{7}{2}\}$.

— La matrice du système (S_4) est $D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 5 & -4 & 5 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. D'après l'exercice III, la matrice D n'est pas inversible.

2. Résolution l'aide de la règle de Cramer
   — On a $|A| = 2 \neq 0$, donc le système S_1 est de Cramer et par conséquent il admet une solution unique.
   Calculons $|N(x)|$ et $|N(y)|$:

$$\begin{aligned} |N(x)| &= \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 32 - 10 = 22 \\ |N(y)| &= \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 40 = -25 \end{aligned}$$

   On a alors $x = \frac{|N(x)|}{|A|} = \frac{22}{2}$ et $y = \frac{|N(y)|}{|A|} = \frac{-25}{2}$.
   Donc l'ensemble de solutions est :

$$\{(\frac{22}{2}, \frac{-25}{2})\}$$

   — On a $|B| = -4 \neq 0$, donc le système (S_2) est de Cramer et par conséquent il admet une solution unique.
   Calculons $|N(x)|$, $|N(y)|$ et $|N(z)|$:

$$\begin{aligned} |N(x)| &= \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \times 1 - 6 \times (-1) + 7 \times (-3) = -19 \\ |N(y)| &= \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) - 1 \times (-18) + 2 \times (-16) = -15 \\ |N(z)| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 1 \times 8 - 1 \times 11 + 2 \times 14 = 25 \end{aligned}$$

   On a alors $x = \frac{|N(x)|}{|B|} = \frac{19}{4}$, $y = \frac{|N(y)|}{|B|} = \frac{15}{4}$ et $z = \frac{|N(z)|}{|B|} = \frac{-25}{4}$.
   Donc l'ensemble de solutions est :

$$X = \{(\frac{19}{4}, \frac{15}{4}, \frac{-25}{4})\}$$

   — On a $|C| \neq 0$, donc le système (S_3) est de Cramer et par conséquent il admet une solution unique.
   Calculons $|N(x)|$, $|N(y)|$ et $|N(z)|$:

$$
\begin{aligned}
|N(x)| &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \\ -2 & -8 & 9 \end{vmatrix} = 1\times 4 - 3\times 6 - 2\times 2 = -18 \\
|N(y)| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 5 \\ 7 & -2 & 9 \end{vmatrix} = 1\times 37 - 5\times 15 + 7\times(-4) = -66 \\
|N(z)| &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & -4 & 3 \\ 7 & -8 & -2 \end{vmatrix} = 1\times 32 - 5\times 12 + 7\times(-2) = -42
\end{aligned}
$$

On a alors $x = \frac{|N(x)|}{|C|} = \frac{-18}{-12} = \frac{3}{2}$, $y = \frac{|N(y)|}{|C|} = \frac{-66}{-12} = \frac{11}{2}$ et $z = \frac{|N(z)|}{|C|} = \frac{-42}{-12} = \frac{7}{2}$.
Donc l'ensemble de solutions est : $X = \{(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}, \frac{7}{2})\}$

— On a $|D| = 0$, donc on va chercher une sous-matrice d'ordre $n-1 = 3-1 = 2$. On a $|A'| = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -29 \neq 0$, donc on obtient le système de Cramer suivant :

$$
(S_4') \begin{cases} x + 5y &= 2 + 4z \\ 5x - 4y &= 5 - 5z \end{cases}
$$

où x et y sont les inconnues principales et z est une inconnue non principale. Calculons $|N(x)|$ et $|N(y)|$ de (S_4') :

$$
\begin{aligned}
|N(x)| &= \begin{vmatrix} 2+4z & 5 \\ 5-5z & -4 \end{vmatrix} \\
&= -4(2+4z) - 5(5-5z) = 9z - 33 \\
|N(y)| &= \begin{vmatrix} 1 & 2+4z \\ 5 & 5-5z \end{vmatrix} \\
&= (5-5z) - 5(2+4z) = -25z - 5
\end{aligned}
$$

On a alors $x = \frac{|N(x)|}{|A'|} = \frac{-9z+33}{29}$ et $y = \frac{|N(y)|}{|A'|} = \frac{25z+5}{29}$.
Vérifions enfin la dernière équation du système (S_4) :

$$
\begin{aligned}
6x + y + z &= 6\frac{-9z+33}{29} + \frac{25z+5}{29} + z \\
&= \frac{-54z + 198 + 25z + 5 + 29z}{29} = \frac{203}{29} \neq 1
\end{aligned}
$$

Cette équation n'est pas vérifiée et par conséquent l'ensemble de solutions est l'ensemble vide :

$$X = \emptyset$$

Remarque : Si on considère le système (S_5) :

$$
\begin{cases} x + 5y - 4z &= 2 \\ 5x - 4y + 5z &= 5 \\ 6x + y + z &= 7 \end{cases}
$$

La seule différence entre (S_4) et (S_5) est le second membre de la troisième équation. Donc tout le calcul qui a été fait pour (S_4) reste valide pour (S_5) à l'exception de la vérification de la troisième équation.
En utilisant $x = \frac{-9z+33}{29}$ et $y = \frac{25z+5}{29}$ dans la troisième équation de (S_5), on a :

$$
\begin{aligned}
6x + y + z &= 6\frac{-9z+33}{29} + \frac{25z+5}{29} + z \\
&= \frac{-54z + 198 + 25z + 5 + 29z}{29} = \frac{203}{29} = 7
\end{aligned}
$$

Cette équation est vérifiée et par conséquent l'ensemble de solutions de (S_5) est :

$$X = \{(\frac{-9z+33}{29}, \frac{25z+z}{29}, z)\ |z \in \mathbb{R}\ \}$$

CORRECTION (EXERCICE 5)

1. La matrice constituée des vecteurs de $B' = \{f_1, f_2, f_3\}$ est :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculons $|P|$:

$$|P| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \times 0 - 1 \times (-2) + 1 \times 2 = 4 \neq 0$$

Donc B' forme une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Les coordonnés du vecteur u dans B sont $X = (3, 2, 1)$. On veut calculer X' les coordonnées de u dans la base B'.
La matrice de passage P est :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow p^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

X' est :

$$\begin{aligned} X' &= P^{-1}X \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{4} \\ \frac{8}{4} \\ \frac{10}{4} \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $u = \frac{3}{2}f_1 + 2f_2 + \frac{5}{2}f_3$

CORRECTION (EXERCICE 6)

1. Calcul du polynôme caractéristique
   — Soit P_A le polynôme caractéristique de la matrice A

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= det(A - \lambda I_2) = det\left(\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 4 = (3-\lambda)^2 - 2^2 \\ &= (3-\lambda-2)(3-\lambda+2) = (1-\lambda)(5-\lambda) \end{aligned}$$

   — Soit P_B le polynôme caractéristique de la matrice B

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= det(B - \lambda I_3) = det\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (4-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (4-\lambda)((3-\lambda)(3-\lambda) - 1) \\ &= (4-\lambda)((3-\lambda)^2 - 1) = (4-\lambda)^2(2-\lambda) \end{aligned}$$

2. Les valeurs propres d'une matrice sont les racines de son polynôme caractéristique
   - Les racines de P_A sont 1 et 5. Donc les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 5$
   - Les racines de P_B sont 2 et 4. Donc les valeurs propres de B sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 4$ avec λ_1 une valeur propre simple et λ_2 est une valeur propre double.
3. Calcul des vecteurs propres associés aux valeurs propres
   - Soit E_1 le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 1$ de A

$$E_1 = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \ (A - \lambda_1 I)v = 0\}$$

$$\begin{aligned} v_1 \in E_1 \quad &\Leftrightarrow \quad (A - \lambda_1 I)v_1 = 0_2 \\ &\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \quad x_1 + 2x_2 = 0 \end{aligned}$$

   Ce qui donne une infinité de solutions : $x_1 = -2x_2$.
   Les vecteurs propres associés à λ_1 sont de la forme $(-2x_2, x_2)$, donc E_1 est engendré par $e_1 = (-2, 1)$.
   Soit E_2 le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_2 = 5$ de A

$$E_2 = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \ (A - \lambda_2 I)v = 0\}$$

$$\begin{aligned} v \in E_2 \quad &\Leftrightarrow \quad (A - \lambda_2 I)v_2 = 0_2 \\ &\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \quad x_1 - 2x_2 = 0 \end{aligned}$$

   Ce qui donne une infinité de solutions : $x_1 = 2x_2$.
   Les vecteurs propres associés à λ_2 sont de la forme $(2x_2, x_2)$, donc E_2 est engendré par $e_2 = (2, 1)$.
   - Soit F_1 le sous-espace propre associé à la valeur propre simple $\lambda_1 = 2$ de B

$$F_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \ (B - \lambda_1 I)v = 0\}$$

$$\begin{aligned} v \in F_1 \quad &\Leftrightarrow \quad (B - 2I)v_1 = 0_3 \\ &\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \end{array} \right. \\ &\Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} x_1 = x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{array} \right. \end{aligned}$$

   Le vecteur propre v_1 associé à λ_1 est de la forme $(x_3, -2x_3, x_3)$, donc F_1 est engendré par $f_1 = (1, -2, 1)$.
   Soit F_2 le sous-espace propre associé à la valeur propre double $\lambda_2 = 4$ de B

$$F_2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \ (B - \lambda_2 I)v = 0\}$$

$$\begin{aligned} v_2 \in F_2 \quad &\Leftrightarrow \quad (A - 4I)v_2 = 0_3 \\ &\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} -x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 = 0 \\ -x_1 - x_3 = 0 \end{array} \right. \\ &\Rightarrow \quad \left\{ \ x_1 = -x_3 \right. \end{aligned}$$

Le vecteur propre v_2 associé à λ_2 est de la forme $(-x_3, x_2, x_3)$, donc F_2 est engendré par $f_2 = (-1, 0, 1)$ et $f_3 = (0, 1, 0)$.

4. Diagonalisation de A et B.
   — La matrice A admet les valeurs propres $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 5$, et les vecteurs propres associés sont $e_1 = (-2, 1)$ et $e_2 = (2, 1)$.
   Soit $P_A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ constituée des vecteurs propres de A. On a $|P_A| = -4 \neq 0$, donc $\{e_1, e_2\}$ forme une base $\mathbb{R}^2$ et A est diagonalisable. La matrice de passage est P_A et sa matrice inverse est :
   $$p_A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$
   Donc
   $$D_A = p_A^{-1} A P_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$
   — La matrice B admet les valeurs propres $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 4$, et les vecteurs propres associés sont $f_1 = (1, -2, 1)$, $f_2 = (-1, 0, 1)$ et $f_3 = (0, 1, 0)$
   Soit $P_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ constituée des vecteurs propres de B. On a $|P_B| = -2 \neq 0$, donc $\{f_1, f_2, f_3\}$ forme une base $\mathbb{R}^3$ et B est diagonalisable. La matrice de passage est P_B et sa matrice inverse est :
   $$p_B^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$
   Donc
   $$D_B = P_B^{-1} B P_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

5. Calcul de A^n et B^n.
   — On a $D_A = P_A^{-1} A P_A$ et $A = P_A D_A P_A^{-1}$, donc
   $$\begin{aligned}
   A^n &= \underbrace{A.A.A \cdots A.A}_{n \text{ fois}} \\
   &= \underbrace{P_A D_A P_A^{-1}.P_A D_A P_A^{-1}.P_A D_A P_A^{-1} \cdots P_A D_A P_A^{-1}.P_A D_A P_A^{-1}}_{n \text{ fois}} \\
   &= P_A D_A (P_A^{-1}.P_A) D_A (P_A^{-1}.P_A) D_A P_A^{-1} \cdots P_A D_A (P_A^{-1}.P_A) D_A.P_A^{-1} \\
   &= P_A D_A.D_A.D_A...D_A.P_A^{-1} \\
   &= P_A.D_A^n.P_A^{-1} \\
   &= \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}.(-\frac{1}{4})\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\
   &= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 2 \times 5^n \\ 1 & 5^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \\
   &= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2(1+5^n) & 4(1-5^n) \\ 1-5^n & -2(1+5^n) \end{pmatrix}
   \end{aligned}$$

— On a $D_B = P_B^{-1} B P_B$ et $B = P_B D_B P_B^{-1}$, donc

$$\begin{aligned}
B^n &= \underbrace{B.B.B \cdots B.B}_{n \text{ fois}} \\
&= \underbrace{P_B D_B P_B^{-1}.P_B D_B P_B^{-1}.P_B D_B P_B^{-1} \cdots P_B D_B P_B^{-1}.P_B D_B P_B^{-1}}_{n \text{ fois}} \\
&= P_B D_B (P_B^{-1}.P_B) D_B (P_B^{-1}.P_B) D_B P_B^{-1} \cdots P_B D_B (P_B^{-1}.P_B) D_B.P_B^{-1} \\
&= P_B D_B.D_B.D_B...D_B.P_B^{-1} \\
&= P_B.D_B^n.P_B^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} (-\frac{1}{2}) \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2^n & -4^n & 0 \\ -2^{n+1} & 0 & 4^n \\ 2^n & 4^n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2^n - 4^n & 0 & -2^n + 4^n \\ 2^{n+1} - 2 \times 4^n & -2 \times 4^n & 2^{n+1} - 2 \times 4^n \\ -2^n + 4^n & 0 & -2^n - 4^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$