Travaux dirigés (avec correction) : Applications linéaires
– Série II –

EXERCICE 1
Déterminer si les applications p_i suivantes sont linéaires :

$$\begin{array}{rcl} p_1 : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (3x+y, x-y) \\ p_2 : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2+y^2 \\ p_3 : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y, x-z, x+y+z) \\ p_4 : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x, xy) \end{array}$$

EXERCICE 2
On considère l'application linéaire suivante :

$$\begin{array}{rcl} p : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x-2y, 4x-8y) \end{array}$$

1. Montrer que p est ni injective ni surjective.
2. Donner une base de son noyau et une base de son image.

EXERCICE 3
On considère les applications linéaires suivantes :

$$\begin{array}{rcl} p_1 : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (3x+y, x-y) \\ p_2 : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (y, x-5y, x+y) \\ p_3 : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+2y-z, 2x+y, y-z,) \end{array}$$

- (a) Déterminer $Ker(p_i)$ et déduire si p_i est injective.
- (b) Déterminer $Im(p_i)$ et déduire si p_i est surjective.
- (c) Déduire si p_i est bijective.

EXERCICE 4
On considère l'application linéaire suivante :

$$\begin{array}{rcl} p : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (-x+2y+2z, -x+z, -x+2y+2z) \end{array}$$

1. Déterminer une base de $ker(p)$ et une base de $Im(p)$
2. A-t-on $\ker(p) \oplus Im(p) = \mathbb{R}^3$?

Rappel : Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E :
$F_1 \oplus F_2 = E \Leftrightarrow F_1 + F_2 = E$ et $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$