Algèbre

Cours (Chapitre 3)

Ensembles 1 & 3

Semestre 2

Prof. Ouaïl OUCHETTO

Faculté des Sciences Juridiques Economiques

et Sociales - Aïn Chock - Casablanca

Année Universitaire 2019-2020

Chapitre 3 : Calcul matriciel

0.1 Définitions et généralités

Définition 0.1.1 — Matrice. Une <u>matrice</u> d'ordre $n \times m$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau d'éléments de $\mathbb{K}$ de n lignes et m colonnes.

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{im} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

L'élément a_{ij} de la matrice A est l'intersection de la ligne i et la colonne j.
Les nombres n et m définissent les dimensions de la matrice A.
On désigne par $M_{n,m}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ à n lignes et m colonnes.

Cas particuliers

- Une matrice A est carrée si $n = m$ et l'ensemble des matrices d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $M_n(\mathbb{K})$.
- Une matrice A est une matrice ligne si $n = 1$.
- Une matrice A est une matrice colonne si $m = 1$.
- Si tous les éléments de A sont nuls, on dit que A est une matrice nulle.

Définition 0.1.2 Soit A une matrice carrée d'ordre n.

- A est une matrice triangulaire supérieure, si et seulement si $\forall i > j$, on a $a_{ij} = 0$.
- A est une matrice triangulaire inférieure, si et seulement si $\forall i < j$, on a $a_{ij} = 0$.
- A est une matrice diagonale si $\forall i \neq j$, on a $a_{ij} = 0$.
- A est une matrice unité ou identité si $\forall i$, on a $a_{ii} = 1$ et $\forall i \neq j$, on a $a_{ij} = 0$. On la note I_n.

■ **Exemple 0.1** :

- La matrice $\begin{pmatrix} 5 & -9 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure. Tous les éléments en-dessous de la diagonale sont nuls (les autres éléments peuvent aussi être nuls).
- La matrice $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 9 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure. Les éléments en dessus de la diagonale sont nuls (les autres éléments peuvent aussi être nuls).
- La matrice $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ est diagonale. Tous les éléments en dehors de la diagonale sont nuls (certains éléments de la diagonale peuvent aussi être nuls). On note aussi que une matrice diagonale est triangulaire supérieure et inférieure à la fois.
- La matrice unité ou la matrice identité d'ordre 3 est $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

■

Définition 0.1.3 — Transposition d'une matrice. La transposée d'une matrice A d'ordre $n \times m$, est une matrice notée ${}^tA$ d'ordre $m \times n$. Pour obtenir la transposée, il suffit d'écrire les n lignes successives en colonnes.

$$ {}^tA = {}^t(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}} = (a_{ji})_{\substack{1\le j\le m\\1\le i\le n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{i1} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{i2} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1j} & a_{2j} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{nj} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{im} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} $$

■ **Exemple 0.2** On considère $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ -2 & 6 & -7 & 0 \\ 3 & 4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$. La transposée de A est :

$$ {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & 6 & 4 \\ 6 & -7 & -4 \\ 8 & 0 & -3 \end{pmatrix} $$

■

Définition 0.1.4 Soit A une matrice carrée d'ordre n :

- A est une matrice symétrique si et seulement si ${}^tA = A$
- A est une matrice antisymétrique si et seulement si ${}^tA = -A$.

■ **Exemple 0.3** On considère les matrices $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -6 \\ 4 & -6 & 7 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -6 \\ -4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

On a

$$\begin{aligned} {}^tA_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -6 \\ 4 & -6 & 7 \end{pmatrix} = A_1 \\ {}^tA_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & -6 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -6 \\ -4 & 6 & 0 \end{pmatrix} = -A_2 \end{aligned}$$

Donc A_1 est une matrice symétrique car $A_1 =^t A_1$ et A_2 est une matrice antisymétrique car $A_2 = -{}^tA_2$. ■

0.2 Opérations sur les matrices

Définition 0.2.1 — Addition de deux matrices. Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}}$ deux matrices d'ordre $n \times m$, la somme de A et B est une matrice d'ordre $n \times m$ définie par :

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}}$$

■ **Exemple 0.4** On considère $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & 6 & -7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -8 \\ 6 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

La somme de $A + B$ est :

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+1 & 4+3 & 6-8 \\ -2+6 & 6+0 & -7+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

■

R La somme de deux matrices n'est définie que si elles ont les mêmes dimensions (ordre).

Propriétés 0.2.1 L'addition interne a les propriétés suivantes :

- Commutative : $A + B = B + A$
- Associative : $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Matrice opposée de A, notée $opp(A)$, est $-A$
- Élément neutre de A est la matrice nulle
- ${}^t(A + B) =^t A +^t B$

Définition 0.2.2 — Multiplication externe. Soient A une matrice d'ordre $n \times m$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, la matrice $\lambda A = P$ est obtenue en multipliant tous les termes de A par λ :

$$\lambda.(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} = (\lambda.a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}$$

■ **Exemple 0.5** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & 6 & -7 \end{pmatrix}$ et calculons $2.A$:

$$2.A = \begin{pmatrix} 2\times 2 & 2\times 4 & 2\times 6 \\ 2\times(-2) & 2\times 6 & 2\times(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ -4 & 12 & -14 \end{pmatrix}$$

■

Propriétés 0.2.2 La multiplication externe a les propriétés suivantes :

- ${}^t(\lambda.A) = \lambda.{}^tA$
- $\lambda.(A+B) = \lambda.A + \lambda.B$

Définition 0.2.3 — Produit de deux matrices. Le produit d'une matrice A d'ordre $n \times \underline{m}$ par une matrice B d'ordre $\underline{m} \times p$, est la matrice C d'ordre $n \times p$:

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & c_{ik} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}_{(n,p)} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boxed{a_{i1}} & \boxed{a_{i2}} & \cdots & \boxed{a_{im}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}_{(n,m)} \times \begin{pmatrix} \cdots & \boxed{a_{1k}} & \cdots \\ \cdots & \boxed{a_{2k}} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \boxed{a_{mk}} & \cdots \end{pmatrix}_{(m,p)}$$

Pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq k \leq p$, l'élément c_{ik} est :

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}.b_{jk} = a_{i1}.b_{1k} + a_{i2}.b_{2k} + \ldots + a_{im}.b_{mk}$$

R Le produit $A.B$ n'est défini que si le nombre de colonne de A est égal au nombre de ligne de B.

■ **Exemple 0.6** On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. La matrice $C = A.B$ est d'ordre 2×3 et les éléments de C sont :

$$\begin{aligned} A.B &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2-4 & 4+12 & 2+8 \\ -2-6 & -4+18 & -2+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 16 & 10 \\ -8 & 14 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

■

Propriétés 0.2.3 Le produit matriciel a les propriétés suivantes :

1. Il n'est pas commutatif : $A.B \neq B.A$
2. Il est associatif : $(A.B).C = A.(B.C)$
3. Il est distributif à gauche et à droite par rapport à l'addition :
$$(A+B).C = A.C + B.C \quad \text{et} \quad C.(A+B) = C.A + C.B$$
4. ${}^t(A.B) = {}^t B.{}^t A$
5. $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda(A.B) = (\lambda.A).B = A.(\lambda.B)$

0.3 Déterminant

A chaque matrice A carrée, on fait correspondre une valeur, appelé déterminant de la matrice, et noté $det(A)$ ou encore $|A|$.

Définition 0.3.1 — Déterminant d'ordre 2. Pour une matrice A d'ordre 2×2, le déterminant est :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}$$

■ **Exemple 0.7** Le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ est :

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 - 2 \times 1 = 10$$

■

Définition 0.3.2 — Cofacteur. Soit A une matrice carrée d'ordre n. Le cofacteur de l'élément a_{ij} est :

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$$

où D_{ij} représente le déterminant de la matrice d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne. L'élément D_{ij} est appelé mineur relatif à a_{ij}.

■ **Exemple 0.8** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, le cofacteur de l'élément a_{23}

est :

$$\Delta_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 & \cancel{1} \\ \cancel{4} & \cancel{3} & \cancel{2} \\ 5 & 4 & \cancel{3} \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

On a supprimé la 2ème ligne et la 3ème colonne de A pour calculer Δ_{23}. ■

Définition 0.3.3 — Déterminant d'ordre supérieur. Le déterminant d'une matrice est la somme de produits de chaque élément d'une ligne (ou d'une colonne) par son cofacteur.

- La ligne i :

$$|A| = a_{i1}.\Delta_{i1} + a_{i2}.\Delta_{i2} + \ldots + a_{in}.\Delta_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.\Delta_{ij}$$

- La colonne j :

$$|A| = a_{1j}.\Delta_{1j} + a_{2j}.\Delta_{2j} + \ldots + a_{nj}.\Delta_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.\Delta_{ij}$$

R Dans chaque cas, on est ramené au calcul de n déterminants d'ordre $n-1$. On applique la même règle pour calculer chacun d'eux et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à des déterminants d'ordre 2.

■ **Exemple 0.9** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Le déterminant de A est :

- Calcul à partir de la 1ère ligne :

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 2\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= 3\times 5 + 2\times(-7) + 1\times 1 = 2$$

- Calcul à partir de la 1ère colonne :

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 4\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 5\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 3\times 5 + 4\times(-2) + 5\times(-1) = 2$$

R Le déterminant peut être calculé selon n'importe quelle ligne ou colonne mais il est plus judicieux de choisir la ligne ou la colonne qui contient un maximum de termes nuls afin de simplifier le calcul.

■

Propriétés 0.3.1 Le déterminant a les propriétés suivantes :

- $|{}^tA| = |A|$
- $|A.B| = |A|.|B|$
- Le déterminant d'une matrice est une 'forme linéaire' des éléments d'une colonne.

$$\begin{aligned} det\,[a_1,a_2,..,a_j+b_j,...,a_n] &= det\,[a_1,a_2,..,a_j,...,a_n]+det\,[a_1,a_2,..,b_j,...,a_n] \\ det\,[a_1,a_2,..,\lambda a_j,...,a_n] &= \lambda det\,[a_1,a_2,..,a_j,...,a_n] \end{aligned}$$

- Si on permute dans une matrice 2 colonnes (ou 2 lignes) le déterminant change de signe.

$$det\,[a_1,a_2,..,a_i,...,a_j,...,a_n] = -det\,[a_1,a_2,..,a_j,...,a_i,...,a_n]$$

Résultat direct : $det\,[a_1,a_2,..,a_i,...,a_i,...,a_n] = 0$.

R A partir de ces propriétés, le calcul du déterminant devient plus facile. On fait apparaître le maximum de zéros sur la même ligne ou sur la même colonne.

■ **Exemple 0.10** Calculons le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2-L_1 \\ L_3-3L_1 \end{matrix} = 1\times(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

■

0.4 Inverse d'une matrice

Définition 0.4.1 Une matrice carrée A d'ordre n est dite inversible, s'il existe une matrice notée A^{-1} du même ordre telle que :

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$$

Théorème 0.4.1 Soit A une matrice carrée d'ordre n est inversible si et seulement si $det(A) \neq 0$ et son inverse est :

$$A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \cdot {}^tCom(A)$$

où $Com(A) = (\Delta_{ij})$ est la comatrice de A qui est la matrice des cofacteurs (voir Définition 0.3.2).

Les éléments de la $Com(A) = (\Delta_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ sont exprimés comme suit :

$$\Delta_{i,j} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{1\,1} & \cdots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \cdots & a_{1\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \cdots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \cdots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n\,1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{n\,n} \end{vmatrix}$$

■ **Exemple 0.11** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ comme $det(A) = 1 \neq 0$, la matrice inverse est :

$$A^{-1} \quad = \quad \frac{1}{det\,A} \cdot {}^tCom(A) = \frac{1}{1}{}^t \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

■

Propriétés 0.4.2 Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n telles que $det(A) \neq 0$ et $det(B) \neq 0$. On a les propriétés suivantes :

- $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A.B)^{-1} = (B)^{-1}.(A)^{-1}$
- ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$

0.5 Application à la résolution de systèmes

0.5.1 Position du problème

On considère un système de n équations et m inconnues.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m & = & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = & \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m & = & b_n \end{cases}$$

où les a_{ij} sont les coefficients du système, les x_i les inconnues et les b_i les termes constants. L'écriture matricielle de ce système est la suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = B$$

Il y a plusieurs méthodes pour résoudre ce système. Dans le cadre de ce cours, on se contente de présenter la méthode d'inversion et la méthode de Cramer.

0.5.2 Résolution par méthode d'Inversion

Théorème 0.5.1 Soit $AX = B$ un système carré, si sa matrice est inversible, alors il admet une solution unique X :

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

■ **Exemple 0.12** On considère le système suivant :

$$\begin{cases} 3x+2y+z &= 3 \\ 4x+3y+z &= 2 \\ 5x+4y+3z &= 1 \end{cases}$$

L'écriture matricielle de (S) est :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad ou \qquad AX = B$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} &= 3\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 4\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 5\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3\times 5 + 4\times(-2) + 5\times(-1) = 2 \neq 0 \end{aligned}$$

On a $|A| \neq 0$ donc A est inversible et A^{-1} est :

$$
\begin{aligned}
A^{-1} &= \frac{1}{det\ A} \cdot {}^{t}Com(A) \\
&= \frac{1}{2}^{t}\begin{pmatrix}
\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \\
-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}
\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}^{t}\begin{pmatrix} 5 & -7 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -7 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Donc X est :

$$
X = A^{-1}B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -7 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 15-4-1 \\ -21+8+1 \\ 3-4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Par conséquent, l'ensemble de solutions de ce système est : $\{(5,-6,0)\}$ ■

0.5.3 Résolution par la méthode de Cramer

Définition 0.5.1 — Systèmes de Cramer. Un système de n équations et n inconnues est dit de Cramer si son déterminant est non nul.

Théorème 0.5.2 Tout système de Cramer $AX = B$ admet une solution unique X. Les composantes de X sont définies par :

$$
x_j = \frac{|a_1, a_2, \ldots, B, \ldots, a_n|}{|a_1, a_2, \ldots, a_j, \ldots, a_n|} = \frac{|N(x_j)|}{|A|} \quad \text{pour tout } j = 1, \ldots, n
$$

où $|N(x_j)|$ est le déterminant de la matrice obtenue par le remplacement de la j-ième colonne de A par le second membre B.

■ **Exemple 0.13** On considère l'exemple précédent :

$$
\begin{cases} 3x+2y+z = 3 \\ 4x+3y+z = 2 \\ 5x+4y+3z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = B
$$

On a $|A| = 2 \neq 0$, donc le système est de Cramer et il admet une solution unique X

dont les composantes sont :

$$|N(x)| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 10$$

$$|N(y)| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

$$|N(z)| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Donc $x = \frac{|N(x)|}{|A|} = 5$, $y = |\frac{N(y)|}{|A|} = -6$ et $z = \frac{|N(z)|}{|A|} = 0$
L'ensemble de solutions est : $\{(5,-6,0)\}$ ■

0.5.4 Résolution d'un système non de Cramer

Si le déterminant d'un système est nul alors il convient de se ramener à un système de Cramer. Pour cela on extrait de la matrice A du système une 'sous-matrice' carrée d'ordre r, le plus élevée possible, dont le déterminant est non nul.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = & \ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r + \ldots + a_{rn}x_n & = & b_r \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = & \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nr}x_r + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

avec $\Delta_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$

On obtient le système de Cramer suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r & = & b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r & = & b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & = & \ldots\ldots\ldots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \ldots + a_{rr}x_r & = & b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n \end{cases}$$

On calcule la valeur des inconnues $x_1, x_2, ..., x_r$, appelées inconnues principales, en fonction des $x_{r+1}, ..., x_n$, appelées inconnues non principales.
Dans le système initial :

- Si les équations, qui n'ont pas été utilisées, sont vérifiées, le système admet une infinité de solutions.
- Si elles ne sont pas toutes vérifiées, le système n'admet pas de solution.

■ **Exemple 0.14** On considère le système suivant :

$$\begin{cases} x+2y+z & = & 1 \\ 2x+y+z & = & 2 \\ 3x+3y+2z & = & 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Comme $|A| = 0$, ce système n'est pas de Cramer. Donc on va chercher une sous-matrice d'ordre 3-1 = 2. On a $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, donc on obtient le système de Cramer suivant :

$$\begin{cases} x+2y & = & 1-z \\ 2x+y & = & 2-z \end{cases}$$

où x et y sont les inconnues principales et z est une inconnue non principale :

$$|N(x)| = \begin{vmatrix} 1-z & 2 \\ 2-z & 1 \end{vmatrix} = z-3 \qquad |N(y)| = \begin{vmatrix} 1 & 1-z \\ 2 & 2-z \end{vmatrix} = z$$

d'où $x = \frac{3-z}{3}$ et $y = -\frac{z}{3}$.
Vérifions enfin la dernière équation du système initial : $3(\frac{3-z}{3}) + 3(-\frac{z}{3}) + 2z = 3$, cette équation est vérifiée. Par conséquent le système (S) admet donc une infinité de solutions :
$X = \{(\frac{3-z}{3}, -\frac{z}{3}, z) \ / \ z \in \mathbb{R}\}$

■

0.6 Représentation matricielle et applications linéaires

Définition 0.6.1 — Matrice associée à une application linéaire. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies n et m respectivement. Soient $B_E = \{e_1, ..., e_n\}$ une base de E et $B_F = \{f_1, ..., f_m\}$ une base de F. Soit $p \in \mathscr{L}(E, F)$, pour $j = 1, ..., n$, on pose $p(e_j) = a_{1j} f_j + a_{2j} f_2 + ... + a_{mj} f_m$

La matrice A associée à p dans les bases B_E et B_F est :

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} = \begin{array}{c c} \begin{array}{cccc} p(e_1) & p(e_2) & \dots & p(e_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{array} \end{array}$$

■ **Exemple 0.15** On considère l'application p :

$$\begin{array}{rcl} p:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (-6x+7y,3x+2y) \end{array}$$

Soient $B_d = \{(2,1);(1,2)\}$ et $B_a = \{(1,0);(0,1)\}$ respectivement la base de l'ensemble de départ et d'arrivée. On a :

$$\begin{array}{rcl} p(2,1) & = & (-5,8) = -5(1,0)+8(0,1) \\ p(1,2) & = & (8,7) = 8(1,0)+7(0,1) \end{array}$$

Matrice associée à p est : $\begin{pmatrix} -5 & 8 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$ ■

R La matrice d'une application linéaire dépend des bases choisies (B_E et B_F)

Définition 0.6.2 — Rang d'une matrice. On définit le rang d'une matrice comme étant le rang de ses vecteurs colonnes.

Proposition 0.6.1 Une matrice d'ordre n est inversible si et seulement si son rang est n.

Théorème 0.6.2 Un système de vecteurs $S = \{u_1,u_2,u_3,\cdots u_n\}$ est une base d'un espace vectoriel E si et seulement si le déterminant de la matrice constituée par ces vecteurs est non nul :

$$S \text{ est une base de } E \Leftrightarrow det(u_1,u_2,\cdots,u_n) \neq 0$$

■ **Exemple 0.16** Considérons le système $S = \{(3,4);(2,3)\}$ de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

La matrice constituée des vecteurs de S est : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $|A| = 1 \neq 0$.

On déduit que S est une base de $\mathbb{R}^2$. ■

R Soit $S = \{u_1,u_2,u_3,\cdots u_n\}$ un système de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

- Si $det(u_1,u_2,\cdots,u_n) \neq 0$ alors S est libre et générateur.
- Si $det(u_1,u_2,\cdots,u_n) = 0$ alors S n'est ni libre ni générateur.

Définition 0.6.3 — Matrice de passage. Soient $B = \{e_1,...,e_n\}$ et $B' = \{e'_1,...,e'_n\}$ deux bases de E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n avec $e'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$ pour $j = 1,2,...,n$. On appelle matrice de passage de B à B' la matrice $P = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Ses colonnes sont composées des coordonnées des vecteurs e'_j dans B.

$$P = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} e'_1 & e'_2 & \dots & e'_p \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array}$$

R

- Toute matrice de passage est inversible,
- Si $P_{BB'}$ est la matrice de passage de B à B' alors $(P_{BB'})^{-1}$ est la matrice de passage de B' à B et $(P_{BB'})^{-1} = P_{B'B}$

Proposition 0.6.3 — Changement de bases. Soit P la matrice de passage de B à B'. $\forall u \in E$, soit X le vecteur colonne des coordonnées de u dans l'ancienne base B et X' est le vecteur colonne de u dans la nouvelle base B'. Alors : $X' = P^{-1}X$

■ **Exemple 0.17** Soit $B = \{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Soit $B' = \{e'_1, e'_2\}$ une deuxième base de $\mathbb{R}^2$ avec $e'_1 = 2e_1 + 3e_2$ et $e'_2 = 1e_1 + 2e_2$.
Les coordonnés d'un vecteur u dans B est $X = (8,1)$. On veut calculer X' les coordonnées de u dans la base B'.

La matrice de passage P est : $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

X' est : $X' = P^{-1}X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Donc $u = 2e'_1 + 4e'_2$ ■

0.7 Diagonalisation

Définition 0.7.1 — Polynôme caractéristique. Soit A une matrice carrée d'ordre n, son polynôme caractéristique $P(\lambda)$ est :

$$P(\lambda) = det(A - \lambda\, I)$$

■ **Exemple 0.18** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ une matrice, son polynôme caractéristique $P(\lambda)$ est :

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= det(A - \lambda\, I) = det\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 3 = \lambda^2 - 4\lambda + 1 \end{aligned}$$

■

Théorème 0.7.1 — Cayley-Hamilton. Toute matrice carrée A est racine de son polynôme caractéristique :

$$\forall A \text{ carrée d'ordre } n : P(A) = O_n$$

Définition 0.7.2 — Valeurs propres et vecteurs propres. Soit A une matrice carrée d'ordre n, et $P(\lambda)$ son polynôme caractéristique.

- Les valeurs propres de A sont les racines de $P(\lambda)$: λ_i est une valeur propre de A si et seulement si $P(\lambda_i) = 0$
- Les vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_i vérifient l'équation suivante : $Av_i = \lambda_i v_i \Leftrightarrow (A - \lambda_i I)v_i = 0_n$

■ **Exemple 0.19** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

- Calculons les valeurs propres de A :
  Le polynôme caractéristique de A est :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 4).$$

  Cette matrice admet deux valeurs propres distinctes $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 4$.
- Calculons les vecteurs propres de A :
  Calcul du v_1 ***associé à*** λ_1

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda_1 I)v_1 &= 0_2 \\ \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad x_1 + 2x2 &= 0 \end{aligned}$$

Ce qui donne une infinité de solutions : $x_1 = -2x_2$.
v_1 est donc de la forme $(-2x_2, x_2)$, il s'agit d'une droite engendrée par $(-2,1)$.

Calcul du v_2 associé à λ_2

$$\begin{array}{rcl} \lambda_2 = 4 \Rightarrow & (A-\lambda_2 I)v_2 & = & 0_2 \\ \Rightarrow & \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & x_1 - x2 = 0 & & \end{array}$$

Ce qui donne une infinité de solutions : $x_1 = x_2$.
v_2 est donc de la forme (x_1, x_1), il s'agit d'une droite de $\mathbb{R}$ engendrée (1,1).

■

Définition 0.7.3 Soit A est une matrice carrée d'ordre n. On dit que A est diagonalisable si elle possède une base constituée de vecteurs propres de A.
On note $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ une telle base, λ_1, λ_2, ..., λ_n les valeurs propres associés et P la matrice de passage constituée de v_1, v_2, ...,v_n disposés en colonne, alors

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

■ **Exemple 0.20** Diagonalisons la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$
D'après l'exemple précédent, cette matrice admet $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 4$ comme valeurs propres, et $v_1 = (-2,1)$ et $v_2 = (1,1)$ comme vecteurs propres.
Le déterminant de $\{v_1, v_2\}$ est non nul donc A est diagonalisable.
La matrice de passage est :

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

d'où

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

■