Algèbre

Cours (Chapitre 2)

Ensembles 1 & 3

Semestre 2

Prof. Ouaïl OUCHETTO

Faculté des Sciences Juridiques Economiques

et Sociales - Aïn Chock - Casablanca

Année Universitaire 2019-2020

Chapitre 2 : Applications linéaires

0.1 Définitions et généralités

Définition 0.1.1 Soit p une application quelconque de E dans F :

1. p est injective si $\forall u, v \in E$, $p(u) = p(v) \Rightarrow u = v$,
   ce qui est équivalent à : $u \neq v \Rightarrow p(u) \neq p(v)$
2. p est surjective si $\forall v \in F, \exists u \in E$ tel que $v = p(u)$
3. p est bijective si et seulement si p est injective et surjective : $\forall v \in F, \exists! u \in E$ tel que $v = p(u)$ (pour tout v de F il existe un u unique de E tel que $v = p(u)$).

■ **Exemple 0.1** On considère l'application f :

$$\begin{array}{rcl} p : \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$$

- p n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent. En effet il n'existe pas de $n \in \mathbb{N}$ tel que $p(n) = 0$ (si ce n existait ce serait $n = -1 \notin \mathbb{N}$).
- Par contre p est injective : soient $n, n' \in \mathbb{N}$ tels que $p(n) = p(n')$ alors $n+1 = n'+1$ donc $n = n'$.
- Donc p n'est pas bijective car elle n'est pas surjective.

■

Définition 0.1.2 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), une application p de E dans F est linéaire si et seulement si :

- $\forall$ u et $v \in E$: $p(u+v) = p(u) + p(v)$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ et $\forall u \in E$: $p(\lambda u) = \lambda p(u)$

si et seulement si :

- $\forall$ u et $v \in E$ et $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$: $p(\lambda u + \mu v) = \lambda p(u) + \mu p(v)$

■ **Exemple 0.2** On considère l'application p de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{rcl} p : \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x - y, 4y) \end{array}$$

Montrons que p est une application linéaire. En effet :

- $\forall(x,y)$ et $(x',y') \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} p((x,y)+(x',y')) &= p(x+x',y+y') \\ &= ((x+x')-(y+y'),4(y+y')) \\ &= ((x-y)+(x'-y'),4y+4y') \\ &= (x-y,4y)+(x'-y',4y') \\ &= p(x,y)+p(x',y') \end{aligned}$$

- $\forall\lambda \in \mathbb{K}$, $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} p(\lambda(x,y)) &= p(\lambda x,\lambda y) \\ &= (\lambda x-\lambda y,4\lambda y) \\ &= \lambda(x-y,4y) \\ &= \lambda p(x,y) \end{aligned}$$

■

Définition 0.1.3 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et p une application linéaire de E vers F.

- On dit que p est un endomorphisme si et seulement si $E=F$.
- On dit que p est un isomorphisme si et seulement si p est bijective.
- On dit que p est un automorphisme si et seulement si $E=F$ et p est bijective.

0.2 Opérations sur les applications linéaires

Proposition 0.2.1 — Somme de deux applications linéaires. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Si p_1 et p_2 sont deux applications linéaires, définies de E vers F, alors l'application p_1+p_2, définie de E vers F par $(p_1+p_2)(u)=p_1(u)+p_2(u)$, est une application linéaire. ■

Le principe de cette proposition est : $\forall u,v \in E$, $\forall\lambda,\mu \in K$:

$$\begin{aligned} (p_1+p_2)(\lambda u+\mu v) &= p_1(\lambda u+\mu v)+p_2(\lambda u+\mu v) \\ &= \lambda p_1(u)+\mu p_1(v)+\lambda p_2(u)+\mu p_2(v) \\ &= \lambda(p_1(u)+p_2(u))+\mu(p_1(v)+p_2(v)) \\ &= \lambda(p_1+p_2)(u)+\mu(p_1+p_2)(v) \end{aligned}$$

Proposition 0.2.2 — Produit d'une application linéaire par un scalaire. Si p est une application linéaire de E dans F et α un réel, alors l'application $(\alpha.p)$ définie de E vers F par $(\alpha.p)(u)=\alpha.p(u)$ est linéaire. ■

Le principe de cette proposition est : $\forall u, v \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}(\alpha.p)(\lambda u+\mu v) &= \alpha.p(\lambda u+\mu v)\\ &= \alpha\lambda.p(u)+\alpha\mu.p(v)\\ &= \lambda\alpha.p(u)+\mu\alpha.p(v)\\ &= \lambda.(\alpha.p)(u)+\mu.(\alpha.p)(v)\end{aligned}$$

Proposition 0.2.3 — Composition de deux applications linéaires. Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Si p_1 est une application linéaire de E dans F et p_2 une application linéaire de F dans G, alors l'application $p_2 o p_1$ est une application linéaire de E dans G. ■

Le principe de cette proposition est : $\forall u, v \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}p_2\circ p_1(\lambda u+\mu v) &= p_2(p_1(\lambda u+\mu v))\\ &= p_2(\lambda p_1(u)+\mu.p_1(v))\\ &= \lambda.p_2(p_1(u))+\mu.p_2(p_1(v))\\ &= \lambda.p_2\circ p_1(u))+\mu.p_2\circ p_1(v)))\end{aligned}$$

Théorème 0.2.4 L'ensemble $L(E,F)$ des applications linéaires définies de E dans F, muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire est un K-espace vectoriel.

Le principe de ce théorème est : $\forall u, v \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned}(p_1+p_2)(\lambda u+\mu v) &= p_1(\lambda u+\mu v)+p_2(\lambda u+\mu v)\\ &= \lambda.p_1(u)+\mu.p_1(v)+\lambda.p_2(u)+\mu.p_2(v)\\ &= \lambda.(p_1(u)+p_2(u))+\mu.(p_1(v)+p_2(v))\\ &= \lambda.(p_1+p_2)(u)+\mu.(p_1+p_2)(v)\end{aligned}$$

0.3 Image et image réciproque par une application linéaire

Définition 0.3.1 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et p est une application linéaire de E dans F.

- Soit A un sous ensemble de E. On appelle l'image de A par p, notée $p(A)$, l'ensemble :

$$p(A) = \{p(u)/u \in A\} = \{v \in F/\exists u \in A : p(u) = v\}$$

- Soit B un sous ensemble de F. On appelle l'image réciproque de B par p, notée $p^{-1}(B)$, l'ensemble :

$$p^{-1}(B) = \{u \in E / p(u) \in B\}$$

Théorème 0.3.1 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et p est une application linéaire de E dans F.

1. Si A est un sous espace vectoriel de E, alors $p(A)$ est un sous espace vectoriel de F.
2. Si B est un sous espace vectoriel de F, alors $p^{-1}(B)$ est un sous espace vectoriel de E.

Théorème 0.3.2 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et p est une application linéaire de E dans F.

- L'image d'un système générateur d'un sous espace vectoriel A de E est un système générateur du sous espace vectoriel $p(A)$ de F.
- L'image par p d'un système lié est un système lié.
- Si l'image par p d'un système est libre alors ce système est libre.

0.4 Noyau et l'image d'une application linéaire

Définition 0.4.1 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et p est une application linéaire de E vers F.

- On appelle le noyau de p, et on note $Ker(p)$ ou encore $p^{-1}(0_F)$, l'ensemble des éléments de E dont l'image est nulle :

$$p^{-1}(0_F) = \{u \in E \quad / \quad p(u) = 0_F\}$$

- Soit p une application de E dans F. On appelle l'image de p, et on note $Im(p)$:

$$Im(p) = p(E) = \{p(u)/u \in E\} = \{v \in F / \exists u \in E : p(u) = v\}$$

■ **Exemple 0.3** On considère l'application linéaire suivante p :

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto (x+4y, 3x+12y) \end{aligned}$$

Déterminons le noyau de p. Cela revient à déterminer (x,y) tel que

$$p(x,y) = (x+4y, 3x+12y) = (0,0)$$

Soit

$$\begin{cases} x+4y & = & 0 \\ 3x+12y & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=-4y$$

Le noyau est composé de tous les vecteurs de la forme (-4y,y). Le noyau est l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ engendré par $(-4,1)$:

$$ker(p) = vect\{(-4,1)\}$$

■

Théorème 0.4.1 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et p est une application linéaire de E vers F. Le noyau $Ker(p)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Le principe de ce théorème est :

- On a $p(0_E) = 0_F$, donc $0_E \in ker(p) \Rightarrow ker(p) \neq 0$
- $\forall u,v \in Ker(p)$, $\forall \lambda, \mu \in K$, on a
$$\begin{aligned} p(\lambda u + \mu v) &= p(\lambda u) + p(\mu v) \text{ (car } p \text{ est linéaire)} \\ &= \lambda p(u) + \mu p(v) \text{ (car } p \text{ est linéaire)} \\ &= \lambda.0 + \mu.0 = 0 \text{ (car } u,v \in ker(p) : p(u) = 0 \text{ et } p(v) = 0) \end{aligned}$$

  Ce qui implique que $\lambda u + \mu v \in ker(p)$. Par conséquent p est un sous-espace vectoriel de E

Théorème 0.4.2 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et p est une application linéaire de E vers F. $Im(p)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Théorème 0.4.3 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et p est une application linéaire de E vers F. $Im(p)$ est le sous espace vectoriel de F engendré par l'image d'une base quelconque de E.

0.5 Applications linéaires injectives et surjectives

Théorème 0.5.1 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et m respectivement et p une application linéaire de E vers F

- p est injective si et seulement si $Ker(p) = 0_E$
- p est surjective si et seulement si $Im(p) = F$
- p est bijective, $dimE = dimF$ si et seulement si p est injective si et seulement si p

est surjective

Corollaire 0.5.2 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et m respectivement et p une application linéaire de E vers F.

- Si l'application linéaire p est injective alors $dimE \leq dimF$
- Si l'application linéaire p est surjective alors $dimE \geq dimF$
- Si l'application linéaire p est bijective alors $dimE = dimF$

0.6 Rang d'une application linéaire

Soit p une application linéaire de E dans F, on vérifie que l'ensemble des images $p(E)$ est un sous espace vectoriel de F :

- $p(E)$ n'est pas vide : $p(0_E) = 0_F$
- $\forall v_1, v_2 \in p(E) : \exists u_1, u_2 \in E/p(u_1) = v_1$ et $p(u_2) = v_2$.
$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= p(u_1) + p(u_2) \\ &= p(u_1 + u_2) \in p(E) \end{aligned}$$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ et $\forall v_1 \in p(E)$:
$$\exists u_1 \in E/p(u_1) = v_1$$
$\lambda.v_1 = \lambda.p(u_1) = p(\lambda.u_1) \in p(E).$

$$\lambda x' + \mu y' = \lambda p(x) + \mu p(y) = p(\lambda x + \mu y)$$

d'où $\lambda x' + \mu y' \in p(E)$

La dimension de $p(E)$ est au plus égale à la dimension de F

Définition 0.6.1 On appelle le rang de l'application linéaire p, la dimension de l'espace $p(E)$.

$$rg(p) = dim(Im(p))$$

■ **Exemple 0.4** Considérons l'application p telle que

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto (x-2y, 4y-2x) \end{aligned}$$

Pour déterminer rang de p, on prend la base canonique de $E = \mathbb{R}^2$:

$$B = \{e_1, e_2\} \quad avec \quad e_1 = (1,0) \quad et \quad e_2 = (0,1)$$

On a

$$\begin{aligned} p(e_1) &= p(1,0) = (1,-2) \\ p(e_2) &= p(0,1) = (-2,4) \end{aligned}$$

Ces deux derniers vecteurs sont liés $(p(e_2) = -2p(e_1))$.
Le rang du système obtenu $S = p(B) = \{p(e_1), p(e_2)\}$ est égal à 1.
Comme les deux vecteurs sont non nuls, en éliminant l'un d'eux, on obtient un système libre . Le rang de l'application linéaire est donc égal à 1 : $rg(p) = dim(Im(p)) = 1$ ■

Théorème 0.6.1 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension fini. Si p est une application linéaire de E vers F , alors :

$$dimE = dimKer(p) + dimIm(p) = dimKer(p) + rg(p)$$

Théorème 0.6.2 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension fini. Si p est une application linéaire de E vers F, alors :

- p est injective si et seulement si $rg(p) = dimE$
- p est surjective si et seulement si $rg(p) = dimF$
- p est bijective si et seulement si $rg(p) = dimE = dimF$