UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA
Faculté des sciences juridiques, économiques et sociales

Licence Sciences Économiques et Gestion **(S2)**
Solutions de la série d'exercices d'algèbre numéro 1 : **(Calcul matriciel)**

Année universitaire : **2019-2020**

Ensembles : 9, 10, 11 et 12
Pr. Mounir Boumhamdi

1 Exercices

Exercice 1.1 *Soient les matrices* $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

1) Trouver une matrice C *telle que* $2A+B-C=O$.
2) Trouver une matrice D *telle que* $A-B+C+2D=O$.

Exercice 1.2 *Effectuer les multiplications suivantes*

1) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

4) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$

Exercice 1.3 *Soient* A *et* B *deux matrices carrées telles que* $\frac{-1}{2}(A-B)^2=AB$.
Montrer que $A^2=-B^2$.

Exercice 1.4 *Considérons les deux matrices*
$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ *et* $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

Calculer

1. $A^T\times B^T$.
2. $(B^T\times A^T)^T$.

Exercice 1.5 *Soit* A *une matrice* 3×3.
écrire sous forme matricielle l'opération qui consiste é ajouter la troisiéme colonne multipliée par 2 é la deuxième colonne.

Exercice 1.6 *Soit* A *une matrice* 3×3.
écrire sous forme matricielle l'opération qui consiste é ajouter la troisiéme ligne multipliée par $\frac{-3}{2}$ *é la première ligne.*

Exercice 1.7 *Vrai-Faux 1.*

Soient A et B deux matrices. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses.

1. *Si le produit AB est défini, alors le produit BA est défini.*
2. *Si la somme $A+B$ est définie, alors le produit AB est défini.*
3. *Si le produit AB est défini, alors le produit B^TA^T est défini.*
4. *Si la somme $A+B$ est définie, alors le produit AB^T est défini.*
5. *Si les produits AB et BA sont définis, alors la somme $A+B$ est définie.*
6. *Si les produits AB et BA sont définis, alors la somme $A+B^T$ est définie.*
7. *Si les produits AB et B^TA sont définis, alors la somme $A+A^T$ est définie.*
8. *Si les produits AB et B^TA sont définis, alors la somme $A+B^T$ est définie.*
9. *Si le produit AB est défini, alors la somme AA^T+BB^T est définie.*
10. *Si le produit AB est défini, alors la somme A^TA+BB^T est définie.*

Exercice 1.8 *Considérons la matrice A définie par :*

$$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&2\\1&1&1\end{pmatrix}$$

1) Calculer $tr(A)$.
2) La matrice A est elle symétrique ?.
3) La matrice A est elle antisymétrique ?.
4) Calculer A^2.
5) Calculer $det(A)$.
6) Calculer $com(A)$.
7) Conclure A^{-1}.

Exercice 1.9 *Calculer le determinant des matrices suivantes :* $A=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&2\\1&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&1\\0&2&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&3&6&-2\\-1&5&1&2\\3&2&0&-6\\2&2&0&-4\end{pmatrix}$

et $D=\begin{pmatrix}1&3&6&-2&-2\\0&5&1&-2&-2\\0&0&1&-6&-2\\0&0&0&-4&-2\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$

2 Solutions

Solution 2.1 *1) Soit C une matrice telle que $2A+B-C=O$.*

On a $2A+B-C=O$ implique que $2A+B=C$.

Donc $C=\begin{pmatrix}4&-2&7\\5&3&0\\3&1&8\end{pmatrix}$.

2) On a $D=\frac{1}{2}(B-A-C)$.

Donc $D=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3&3&-9\\-6&-3&3\\-3&0&-9\end{pmatrix}$.

Solution 2.2 *1)* $\begin{pmatrix}1&-1&3\\2&1&-1\\1&0&3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&2\\1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2&5\\4&0&2\\5&3&7\end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix}1&-1&3\\2&1&-1\\1&0&3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&1\\-2&1\\10&3\end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix}1&-1&3\\2&1&-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2&0\\2&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&5\\5&-1\\5&6\end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & -3 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 7 & -2 \end{pmatrix}$

Solution 2.3 *On a* $\frac{-1}{2}(A-B)^2 = AB$, *implique que*

$$A^2 - 2AB + B^2 = 2AB.$$

Implique que : $A^2 = -B^2$.

Solution 2.4 *1. Soient* $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) On a $A^T \times B^T = (A \times B)$

Or $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

D'où $A^T \times B^T = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

2. On a $(B^T \times A^T)^T = B \times A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

Solution 2.5 *Soit* $A \in \mathcal{M}_3$ *tel que* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

On a : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1 + \frac{-3}{2}L_3]{} \begin{pmatrix} a_{11} + \frac{-3}{2}a_{31} & a_{12} + \frac{-3}{2}a_{32} & a_{13} + \frac{-3}{2}a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Solution 2.6 *Soient* A *et* B *deux matrices.*

1. *Si le produit* AB *est défini, alors le produit* BA *est défini.* **Faux**
2. *Si la somme* $A+B$ *est définie, alors le produit* AB *est défini.* **Faux**
3. *Si le produit* AB *est défini, alors le produit* B^TA^T *est défini.* **Faux**
4. *Si la somme* $A+B$ *est définie, alors le produit* $(AB^T$ *est défini.* **Vrais**
5. *Si les produits* AB *et* BA *sont définis, alors la somme* $A+B$ *est définie.* **Faux**
6. *Si les produits* AB *et* BA *sont définis, alors la somme* $A+B^T$ *est définie.* **Vrais**
7. *Si les produits* AB *et* B^TA *sont définis, alors la somme* $A+A^T$ *est définie.* **Faux**
8. *Si les produits* AB *et* B^TA *sont définis, alors la somme* $A+B^T$ *est définie.* **Vrais**
9. *Si le produit* AB *est défini, alors la somme* AA^T+BB^T *est définie.* **Faux**
10. *Si le produit* AB *est défini, alors la somme* A^TA+BB^T *est définie.* **Faux**

Solution 2.7 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & -2 \\ -1 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & -6 \\ 2 & 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ *et* $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On a

- $det(A) = 2(-1) - (-1) + (-1) = -2$.

- De même $det(B) = -2$.

- Dans la matrice C, *la première colonne est proportionnelle é la quatrième ainsi que le facteur de proportionnalité est égal à* -2. *Donc* $det(C) = 0$.

- La matrice D *est diagonale, donc*

$$det(D) = 1 \times 5 \times 1 \times -4 \times 1 = -20$$

Solution 2.8 *Considérons la matrice* A *définie par :*

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) $tr(A) = 2 + 2 + 1 = 3$.

2) La matrice A n'est pas symétrique.

3) La matrice A n'est pas antisymétrique.

4) $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 7 \\ 5 & 3 & 17 \end{pmatrix}$.

5) $det(A) = -2$.

6) $com(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

7) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.