Cours d'algèbre (S2) LSEG

Séances du 16 Mars 2020

Ensembles : 8 et 9

Pr. Mounir Boumhamdi

UNIERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA
Faculté des sciences juridiques, économiques et sociales

Les matrices

Les matrices sont des tableaux de nombres. La résolution d'un certain nombre de problèmes d'algèbre linéaire se ramène à des manipulations sur les matrices. En particulier pour la résolution des systèmes linéaires que nous verrons par la suite.

- **Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.**

Les matrices

Les matrices sont des tableaux de nombres. La résolution d'un certain nombre de problèmes d'algèbre linéaire se ramène à des manipulations sur les matrices. En particulier pour la résolution des systèmes linéaires que nous verrons par la suite.

- **Dans ce chapitre,** $\mathbb{K}$ **désigne** $\mathbb{R}$ **ou** $\mathbb{C}$.

Définition 1.1

- On appelle **matrice** $m \times n$ (ou d'ordre $m \times n$) à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout tableau de m lignes et n colonnes d'éléments de $\mathbb{K}$. L'ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
- Si $m = n$ on dit qu'on a une **matrice carrée**. L'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Une matrice $n \times 1$ est appelée **vecteur-colonne** et une matrice $1 \times n$ est appelée **vecteur-ligne**.
- On convient de noter a_{ij} l'élément de la matrice situé sur la i-ème ligne et j-ième colonne ($1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$).

Définition 1.1

- On appelle **matrice** $m \times n$ (ou d'ordre $m \times n$) à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout tableau de m lignes et n colonnes d'éléments de $\mathbb{K}$. L'ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
- Si $m = n$ on dit qu'on a une **matrice carrée**. L'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Une matrice $n \times 1$ est appelée **vecteur-colonne** et une matrice $1 \times n$ est appelée **vecteur-ligne**.
- On convient de noter a_{ij} l'élément de la matrice situé sur la i-ème ligne et j-ième colonne ($1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$).

Définition 1.1

- On appelle **matrice** $m \times n$ (ou d'ordre $m \times n$) à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout tableau de m lignes et n colonnes d'éléments de $\mathbb{K}$. L'ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
- Si $m = n$ on dit qu'on a une **matrice carrée**. L'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Une matrice $n \times 1$ est appelée **vecteur-colonne** et une matrice $1 \times n$ est appelée **vecteur-ligne**.
- On convient de noter a_{ij} l'élément de la matrice situé sur la i-ème ligne et j-ième colonne ($1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$).

Définition 1.1

- On appelle **matrice** $m \times n$ (ou d'ordre $m \times n$) à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout tableau de m lignes et n colonnes d'éléments de $\mathbb{K}$. L'ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
- Si $m = n$ on dit qu'on a une **matrice carrée**. L'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Une matrice $n \times 1$ est appelée **vecteur-colonne** et une matrice $1 \times n$ est appelée **vecteur-ligne**.
- On convient de noter a_{ij} l'élément de la matrice situé sur la i-ème ligne et j-ième colonne ($1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$).

- Une matrice A est représentée entre deux parenthèses ou deux crochets :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\text{ou } A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}, \text{ où encore } A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}.$$

- Une matrice A est représentée entre deux parenthèses ou deux crochets :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ou $A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$, où encore $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$.

- Une matrice A est représentée entre deux parenthèses ou deux crochets :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ou $A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$, où encore $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$.

- Une matrice A est représentée entre deux parenthèses ou deux crochets :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ou $A=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$, où encore $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$.

Exemple 1.1

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est carrée et d'ordre 3.

- Addition de matrices

Définition 1.2

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ deux matrices $m \times n$, on définit l'addition des deux matrices A et B par :

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}.$$

Exemple 1.2

Considérons les matrices
$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0 & -1 & -2\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Nous avons :

$$A+B=\begin{pmatrix}1+0 & -1-1 & 3-2\\ 2+1 & 1+2 & -1+3\\ 1+1 & 0+0 & 3+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

Exemple 1.2

Considérons les matrices
$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix}0 & -1 & -2\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Nous avons :

$$A+B=\begin{pmatrix}1+0 & -1-1 & 3-2\\ 2+1 & 1+2 & -1+3\\ 1+1 & 0+0 & 3+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

Exemple 1.2

Considérons les matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix}0 & -1 & -2\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Nous avons :

$$A+B=\begin{pmatrix}1+0 & -1-1 & 3-2\\ 2+1 & 1+2 & -1+3\\ 1+1 & 0+0 & 3+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

Exemple 1.2

Considérons les matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix}0 & -1 & -2\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Nous avons :

$$A+B=\begin{pmatrix}1+0 & -1-1 & 3-2\\ 2+1 & 1+2 & -1+3\\ 1+1 & 0+0 & 3+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

Remarque 1.1

La somme de deux matrices de tailles différentes n'est pas définie.

Définition 1.3

-**La matrice nulle**, que l'on note $O_{m,n}$, est la matrice dont tous les éléments sont nulles.

-**La matrice opposée** d'une matrice A, que l'on note $-A$. Si $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}}$ alors $-A = (-a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}}$.

Définition 1.3

-**La matrice nulle**, que l'on note $O_{m,n}$, est la matrice dont tous les éléments sont nulles.

-**La matrice opposée** d'une matrice A, que l'on note $-A$. Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ alors $-A = (-a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$.

Exemple 1.3

Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, on a : $-A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Exemple 1.3

Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, on a : $-A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Propriété 1.1

Soient A, B et C des matrices de même ordre, nous avons

- $A + B = B + A$ (commutativité),
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associativité).

Propriété 1.1

Soient A, B et C des matrices de même ordre, nous avons

- $A + B = B + A$ (commutativité),
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associativité).

Propriété 1.1

Soient A, B et C des matrices de même ordre, nous avons

- $A + B = B + A$ (commutativité),

- $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associativité).

Définition 1.4

- On appelle **matrice diagonale** toute matrice carrée $D=(d_{ij})_{1\leq i;j\leq n}$ telle que $i \neq j \Rightarrow d_{ij} = 0$. Si on note $d_i = d_{ii}$, une matrice diagonale est de la forme

$$D_n = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}.$$

On la note $\mathrm{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$.

- **La matrice identité** d'ordre n, notée I_n, est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(1, 1, \dots, 1)$.

Définition 1.4

- On appelle **matrice diagonale** toute matrice carrée $D{=}(d_{ij})_{1\leq i;j\leq n}$ telle que $i \neq j \Rightarrow d_{ij} = 0$. Si on note $d_i = d_{ii}$, une matrice diagonale est de la forme

$$D_n = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}.$$

On la note $\mathrm{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$.

- **La matrice identité** d'ordre n, notée I_n, est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(1, 1, \dots, 1)$.

Définition 1.4

- On appelle **matrice diagonale** toute matrice carrée $D=(d_{ij})_{1\leq i;j\leq n}$ telle que $i \neq j \Rightarrow d_{ij}=0$. Si on note $d_i = d_{ii}$, une matrice diagonale est de la forme

$$D_n = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}.$$

On la note $\mathrm{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$.

- **La matrice identité** d'ordre n, notée I_n, est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(1, 1, \dots, 1)$.

Définition 1.4

- On appelle **matrice diagonale** toute matrice carrée $D{=}(d_{ij})_{1\leq i;j\leq n}$ telle que $i \neq j \Rightarrow d_{ij} = 0$. Si on note $d_i = d_{ii}$, une matrice diagonale est de la forme

$$D_n = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}.$$

On la note $\mathrm{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$.

- **La matrice identité** d'ordre n, notée I_n, est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(1, 1, \dots, 1)$.

Définition 1.5

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i;j \leq n}$ une matrice carrée.

On dit que A est **triangulaire supérieure** (resp. **inférieure**) si $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$ (resp. si $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$).

Remarque 1.2

Toute matrice triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure est une matrice diagonale.

Définition 1.5

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i;j \leq n}$ une matrice carrée.

On dit que A est **triangulaire supérieure** (resp. **inférieure**) si $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$ (resp. si $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$).

Remarque 1.2

Toute matrice triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure est une matrice diagonale.

Définition 1.5

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i;j \leq n}$ une matrice carrée.

On dit que A est **triangulaire supérieure** (resp. **inférieure**) si $i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$ (resp. si $i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$).

Remarque 1.2

Toute matrice triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure est une matrice diagonale.

- Produit d'une matrice par un scalaire

Définition 1.6

soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ une matrice $m \times n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit le produit d'une matrice par un scalaire par

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}.$$

- Produit d'une matrice par un scalaire

Définition 1.6

soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}$ une matrice $m \times n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit le produit d'une matrice par un scalaire par

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}.$$

- Produit d'une matrice par un scalaire

Définition 1.6

soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ une matrice $m \times n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit le produit d'une matrice par un scalaire par

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}.$$

Exemple 1.4

Soient $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\lambda = \frac{2}{3}$. On a

$$C=\lambda A=\begin{pmatrix} \frac{2}{3}\times 1 & \frac{2}{3}\times -1 & \frac{2}{3}\times 3 \\ \frac{2}{3}\times 2 & \frac{2}{3}\times 1 & \frac{2}{3}\times -1 \\ \frac{2}{3}\times 1 & \frac{2}{3}\times 0 & \frac{2}{3}\times 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Propriété 1.2

Soient A et B deux matrices de même ordre et $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire, on a

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B \quad \text{(distributivité)}.$$

Exemple 1.4

Soient $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ et $\lambda = \frac{2}{3}$.On a

$$C=\lambda A=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\times 1 & \frac{2}{3}\times -1 & \frac{2}{3}\times 3\\ \frac{2}{3}\times 2 & \frac{2}{3}\times 1 & \frac{2}{3}\times -1\\ \frac{2}{3}\times 1 & \frac{2}{3}\times 0 & \frac{2}{3}\times 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 2\\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Propriété 1.2

Soient A et B deux matrices de même ordre et $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire, on a

$$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B \quad \text{(distributivité).}$$

Exemple 1.4

Soient $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ et $\lambda = \frac{2}{3}$.On a

$$C=\lambda A=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\times 1 & \frac{2}{3}\times -1 & \frac{2}{3}\times 3\\ \frac{2}{3}\times 2 & \frac{2}{3}\times 1 & \frac{2}{3}\times -1\\ \frac{2}{3}\times 1 & \frac{2}{3}\times 0 & \frac{2}{3}\times 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 2\\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Propriété 1.2

Soient A et B deux matrices de même ordre et $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire, on a

$$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B \quad \text{(distributivité).}$$

Exemple 1.4

Soient $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ et $\lambda = \frac{2}{3}$.On a

$$C=\lambda A=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\times 1 & \frac{2}{3}\times -1 & \frac{2}{3}\times 3\\ \frac{2}{3}\times 2 & \frac{2}{3}\times 1 & \frac{2}{3}\times -1\\ \frac{2}{3}\times 1 & \frac{2}{3}\times 0 & \frac{2}{3}\times 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 2\\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Propriété 1.2

Soient A et B deux matrices de même ordre et $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire, on a

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B \quad \text{(distributivité)}.$$

- Produit de matrices

Définition 1.7

Soient $A = (a_{ik})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq k\leq p}}$ une matrice $m \times p$ et $B = (b_{kj})_{\substack{1\leq k\leq p \\ 1\leq j\leq n}}$ une matrice $p \times n$, on définit le produit des matrices A et B par

$$A \times B = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \right)_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}},$$

qui est une matrice $m \times n$.

- Produit de matrices

Définition 1.7

Soient $A = (a_{ik})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq k\leq p}}$ une matrice $m \times p$ et $B = (b_{kj})_{\substack{1\leq k\leq p \\ 1\leq j\leq n}}$ une matrice $p \times n$,on définit le produit des matrices A et B par

$$A \times B = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \right)_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}},$$

qui est une matrice $m \times n$.

- Produit de matrices

Définition 1.7

Soient $A = (a_{ik})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq k\leq p}}$ une matrice $m \times p$ et $B = (b_{kj})_{\substack{1\leq k\leq p\\1\leq j\leq n}}$ une matrice $p \times n$,on définit le produit des matrices A et B par

$$A \times B = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}\right)_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}},$$

qui est une matrice $m \times n$.

- Produit de matrices

Définition 1.7

Soient $A = (a_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq p}}$ une matrice $m \times p$ et $B = (b_{kj})_{\substack{1 \leq k \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ une matrice $p \times n$,on définit le produit des matrices A et B par

$$A \times B = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \right)_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}},$$

qui est une matrice $m \times n$.

- Produit de matrices

Définition 1.7

Soient $A = (a_{ik})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq k\leq p}}$ une matrice $m \times p$ et $B = (b_{kj})_{\substack{1\leq k\leq p \\ 1\leq j\leq n}}$ une matrice $p \times n$,on définit le produit des matrices A et B par

$$A \times B = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \right)_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}},$$

qui est une matrice $m \times n$.

Exemple 1.5

Considérons les deux matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ et

$B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

- La matrice A est d'ordre 3×3 et la matrice B est d'ordre 3×2, donc la matrice $A\times B$ est d'ordre 3×2.
- On a

$$A\times B=\begin{pmatrix}1\times 2-1\times 1+3\times 0 & 1\times -1+0\times 1+3\times 1\\ 2\times 2+1\times 1-1\times 0 & 2\times -1+1\times 0-1\times 1\\ 1\times 2+0\times 1+3\times 0 & 1\times -1+0\times 0+3\times 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & -3\\ 2 & -2\end{pmatrix}.$$

Exemple 1.5

Considérons les deux matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

- La matrice A est d'ordre 3×3 et la matrice B est d'ordre 3×2, donc la matrice $A\times B$ est d'ordre 3×2.

- On a

$$A\times B=\begin{pmatrix}1\times 2-1\times 1+3\times 0 & 1\times -1+0\times 1+3\times 1\\ 2\times 2+1\times 1-1\times 0 & 2\times -1+1\times 0-1\times 1\\ 1\times 2+0\times 1+3\times 0 & 1\times -1+0\times 0+3\times 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & -3\\ 2 & -2\end{pmatrix}.$$

Exemple 1.5

Considérons les deux matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et

$B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- La matrice A est d'ordre 3×3 et la matrice B est d'ordre 3×2, donc la matrice $A \times B$ est d'ordre 3×2.

- On a

$$A \times B=\begin{pmatrix} 1\times 2 - 1\times 1 + 3\times 0 & 1\times -1 + 0\times 1 + 3\times 1 \\ 2\times 2 + 1\times 1 - 1\times 0 & 2\times -1 + 1\times 0 - 1\times 1 \\ 1\times 2 + 0\times 1 + 3\times 0 & 1\times -1 + 0\times 0 + 3\times 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.5

Considérons les deux matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

- La matrice A est d'ordre 3×3 et la matrice B est d'ordre 3×2, donc la matrice $A\times B$ est d'ordre 3×2.

- On a

$$A\times B=\begin{pmatrix}1\times 2-1\times 1+3\times 0 & 1\times -1+0\times 1+3\times 1\\ 2\times 2+1\times 1-1\times 0 & 2\times -1+1\times 0-1\times 1\\ 1\times 2+0\times 1+3\times 0 & 1\times -1+0\times 0+3\times 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & -3\\ 2 & -2\end{pmatrix}.$$

Exemple 1.5

Considérons les deux matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- La matrice A est d'ordre 3×3 et la matrice B est d'ordre 3×2, donc la matrice $A \times B$ est d'ordre 3×2.
- On a

$$A \times B=\begin{pmatrix} 1 \times 2 - 1 \times 1 + 3 \times 0 & 1 \times -1 + 0 \times 1 + 3 \times 1 \\ 2 \times 2 + 1 \times 1 - 1 \times 0 & 2 \times -1 + 1 \times 0 - 1 \times 1 \\ 1 \times 2 + 0 \times 1 + 3 \times 0 & 1 \times -1 + 0 \times 0 + 3 \times 1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Propriété 1.3

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors

* $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ (associativité),

* $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ (distributivité).

- Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ alors $A \times I_n = I_n \times A = A$.

Remarque 1.3

On a généralement

$$A \times B \neq B \times A$$

Propriété 1.3

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$,alors

* $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ (associativité),

* $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ (distributivité).

• Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ alors $A \times I_n = I_n \times A = A$.

Remarque 1.3

On a généralement

$$A \times B \neq B \times A$$

Propriété 1.3

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$,alors

* $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ (associativité),

* $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ (distributivité).

• Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ alors $A \times I_n = I_n \times A = A$.

Remarque 1.3

On a généralement

$$A \times B \neq B \times A$$

Propriété 1.3

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$,alors

* $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ (associativité),

* $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ (distributivité).

• Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ alors $A \times I_n = I_n \times A = A$.

Remarque 1.3

On a généralement

$$A \times B \neq B \times A$$

Propriété 1.3

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$,alors

* $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ (associativité),

* $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ (distributivité).

• Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ alors $A \times I_n = I_n \times A = A$.

Remarque 1.3

On a généralement

$$A \times B \neq B \times A$$