Cours d'algèbre
(S2) LSEG

Séance du 02 Avril 2020
Ensembles : 9, 10, 11 et 12

Pr. Mounir Boumhamdi

UNIERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA
Faculté des sciences juridiques, économiques et sociales

Définition 1.14

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$. une matrice carrée d'ordre n. Étant donné un couple (i,j) d'entiers, $1 \leq i,j \leq n$,

on note A_{ij} la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne de A.

Définition 1.14

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$. une matrice carrée d'ordre n. Étant donné un couple (i, j) d'entiers, $1 \le i, j \le n$,

on note A_{ij} la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne de A.

Définition 1.14

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$. une matrice carrée d'ordre n. Étant donné un couple (i, j) d'entiers, $1 \leq i, j \leq n$,

on note A_{ij} la matrice carrée d'ordre $n - 1$ obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne de A.

On définit le déterminant de A, et on le note $\det(A)$, par récurrence sur l'ordre de la matrice A :

- si $n = 1$: le déterminant de A est le nombre $\det(A) = a_{11}$, On définit le déterminant de A, et on le note $\det(A)$, par récurrence sur l'ordre de la matrice A :

- si $n = 1$: le déterminant de A est le nombre $\det(A) = a_{11}$,

- si $n > 1$: le déterminant de A est le nombre

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A_{ij}) \text{ quelle que soit la ligne } i,\ 1 \leq i \leq n,$$

ou, de manière équivalente, le nombre

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A_{ij}) \text{ quelle que soit la colonne } j,\ 1 \leq j \leq n.$$

- si $n > 1$: le déterminant de A est le nombre

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A_{ij}) \text{ quelle que soit la ligne } i,\ 1 \leq i \leq n,$$

ou, de manière équivalente, le nombre

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(A_{ij}) \text{ quelle que soit la colonne } j,\ 1 \leq j \leq n.$$

Remarque 1.4

Pour retrouver les signes de ces deux formules, on peut remarquer que la distribution des signes $+$ et $-$ avec la formule $(-1)^{i+j}$ est donnée par :

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Remarque 1.4

Pour retrouver les signes de ces deux formules, on peut remarquer que la distribution des signes $+$ et $-$ avec la formule $(-1)^{i+j}$ est donnée par :

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Exemple 1.9

Considérons la matrice $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ alors

$$\det(A_{11}) = a_{22},\ \det(A_{12}) = a_{21},\ \det(A_{21}) = a_{12} \text{ et } \det(A_{22}) = a_{11}$$

et on peut calculer $\det(A)$ par l'une des formules suivantes :

- $a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ (développement suivant la ligne $i = 1$),

Exemple 1.9

Considérons la matrice $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ alors

$$\det(A_{11}) = a_{22},\ \det(A_{12}) = a_{21},\ \det(A_{21}) = a_{12} \text{ et } \det(A_{22}) = a_{11}$$

et on peut calculer $\det(A)$ par l'une des formules suivantes :

- $a_{11} \det(A_{11}) - a_{12} \det(A_{12}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ (développement suivant la ligne $i = 1$),

Exemple 1.9

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ alors

$$\det(A_{11}) = a_{22},\ \det(A_{12}) = a_{21},\ \det(A_{21}) = a_{12} \text{ et } \det(A_{22}) = a_{11}$$

et on peut calculer $\det(A)$ par l'une des formules suivantes :

- $a_{11} \det(A_{11}) - a_{12} \det(A_{12}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ (développement suivant la ligne $i = 1$),

Exemple 1.9

Considérons la matrice $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ alors

$$\det(A_{11}) = a_{22}, \ \det(A_{12}) = a_{21}, \ \det(A_{21}) = a_{12} \text{ et } \det(A_{22}) = a_{11}$$

et on peut calculer $\det(A)$ par l'une des formules suivantes :

- $a_{11} \det(A_{11}) - a_{12} \det(A_{12}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ (développement suivant la ligne $i = 1$),

- $-a_{21}\ \det(A_{21}) + a_{22}\ \det(A_{22}) = -a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11}$ (développement suivant la ligne $i = 2$),
- $a_{11}\ \det(A_{11}) - a_{21}\ \det(A_{21}) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ (développement suivant la colonne $j = 1$),
- $-a_{12}det(A_{12}) + a_{22}\ \det(A_{22}) = -a_{12}a_{21} + a_{22}a_{11}$ (développement suivant la colonne $j = 2$).

- $-a_{21}\ \det(A_{21}) + a_{22}\ \det(A_{22}) = -a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11}$ (développement suivant la ligne $i = 2$),
- $a_{11}\ \det(A_{11}) - a_{21}\ \det(A_{21}) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ (développement suivant la colonne $j = 1$),
- $-a_{12} det(A_{12}) + a_{22}\ \det(A_{22}) = -a_{12}a_{21} + a_{22}a_{11}$ (développement suivant la colonne $j = 2$).

- $-a_{21}\ \det(A_{21}) + a_{22}\ \det(A_{22}) = -a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11}$ (développement suivant la ligne $i = 2$),
- $a_{11}\ \det(A_{11}) - a_{21}\ \det(A_{21}) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ (développement suivant la colonne $j = 1$),
- $-a_{12}det(A_{12}) + a_{22}\ \det(A_{22}) = -a_{12}a_{21} + a_{22}a_{11}$ (développement suivant la colonne $j = 2$).

Il convient d'utiliser cette définition après avoir fait apparaître sur une même rangée le plus possible de zéros sachant que

- si deux colonnes (resp. deux lignes) sont identiques ou proportionnelles, alors $\det(A) = 0$,

- si on échange deux colonnes (resp. deux lignes), alors le déterminant est changé en son opposé,

- on ne change pas un déterminant si on ajoute à une colonne (resp. une ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes).

Il convient d'utiliser cette définition après avoir fait apparaître sur une même rangée le plus possible de zéros sachant que

- si deux colonnes (resp. deux lignes) sont identiques ou proportionnelles, alors $\det(A) = 0$,

- si on échange deux colonnes (resp. deux lignes), alors le déterminant est changé en son opposé,

- on ne change pas un déterminant si on ajoute à une colonne (resp. une ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes).

Il convient d'utiliser cette définition après avoir fait apparaître sur une même rangée le plus possible de zéros sachant que

- si deux colonnes (resp. deux lignes) sont identiques ou proportionnelles, alors $\det(A) = 0$,

- si on échange deux colonnes (resp. deux lignes), alors le déterminant est changé en son opposé,

- on ne change pas un déterminant si on ajoute à une colonne (resp. une ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes).

Il convient d'utiliser cette définition après avoir fait apparaître sur une même rangée le plus possible de zéros sachant que

- si deux colonnes (resp. deux lignes) sont identiques ou proportionnelles, alors $\det(A) = 0$,

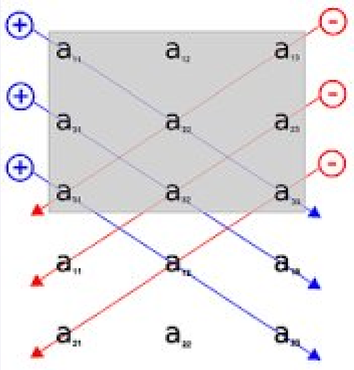
- si on échange deux colonnes (resp. deux lignes), alors le déterminant est changé en son opposé,

- on ne change pas un déterminant si on ajoute à une colonne (resp. une ligne) une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes).

- Déterminant d'une matrice d'ordre 3

Propriété (Règle de Sarrus)

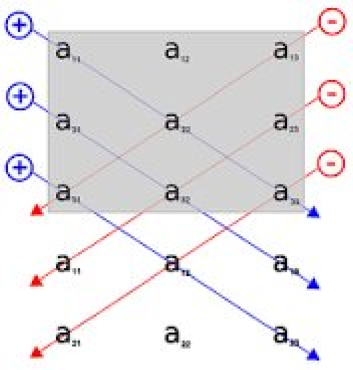
Soit A une matrice carrée d'ordre $n = 3$. Le déterminant de A peut se calculer à l'aide de la technique suivante :



- Déterminant d'une matrice d'ordre 3

Propriété (Règle de Sarrus)

Soit A une matrice carrée d'ordre $n = 3$. Le déterminant de A peut se calculer à l'aide de la technique suivante :



Exemple 1.10

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, on a $\det(A) = (5\times3\times6+4\times1\times1+2\times7\times2)-(1\times3\times2+2\times1\times5+7\times4\times6) = -62.$

Propriété 1.6

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments diagonaux.

Théorème 1.2

Soit A une matrice.

A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Propriété 1.6

Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments diagonaux.

Théorème 1.2

Soit A une matrice.

A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Propriété 1.7

- $\det(A^T) = \det(A)$,
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$,
- $\det(A \times B) = \det(A) \times \det B$.

Propriété 1.7

- $\det(A^T) = \det(A)$,
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$,
- $\det(A \times B) = \det(A) \times \det B$.

Propriété 1.7

- $\det(A^T)=\det(A)$,
- $\det(A^{-1})=\frac{1}{\det(A)}$,
- $\det(A \times B)=\det(A)\times\det B$.