Exercice 7

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.1.0 + 3.1.1 + \alpha.2.1 - 1.1.\alpha - 1.1.1 - 0.2.3$$

$$= 0 + 3 + 2\alpha - \alpha - 1 - 0$$

$$= 2 + \alpha.$$

$$\det(A) = 0 \Rightarrow 2 + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -2.$$

Exercice 8

$$A = \begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3} \begin{vmatrix} 1+a+b+c & 1+a+b+c & 1+a+b+c \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow A = (1+a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} \xrightarrow[C_3 \leftarrow C_3 - C_1]{C_2 \leftarrow C_2 - C_1}$$

$$A = (1+a+b+c) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{Matrice triangulaire}}$$

Matrice triangulaire
$\Rightarrow$ déterminant est le produit des éléments diagonaux $= 1$

$$\Rightarrow A = (1+a+b+c)$$

N. ABID

Exercice 9

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

on vérifie tout d'abord si $\det(A) \neq 0$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (2-1) - 1 \cdot (1-2) + 2(1-4)$$

$$= 1 + 1 - 6$$

$$= -4$$

$\det(A) = -4 \Rightarrow$ A est inversible $\exists A^{-1} /$

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

on utilise la déf suivante

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t com(A)$$

${}^t com(A)$ est le transposé de la comatrice de A.

$$com(A) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^t com(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

D. ABDI

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcul $\det(B)$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1(3-4) = 1$$

on développe suivant la première colonne

donc B est inversible.

Pour déterminer l'inverse de B on utilise la méthode ~~de~~ de gauss. Pour comprendre cette méthode, considérons syst. algébrique linéaire :

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$$

on le récrit sous forme matricielle.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \quad A \cancel{X} \quad X = \mathbb{I} B$$

déterminer x, y, z équivaut à déterminer le vect $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. à partir de l'éq matricielle

$$AX = \mathbb{I}B.$$

A. ABID

le syst admet une seule solut ssi le det de A $\neq 0$.

ce qui veut dire que A^{-1} existe et on sait que

$$A^{-1} \cdot A = \mathbb{1}.$$

donc on va multiplier les deux membres de l'égalité par A^{-1}.

$$A X = \mathbb{1} B$$

$$\underbrace{A^{-1} A}_{} X = A^{-1} \mathbb{1} B$$

$$\mathbb{1} X = A^{-1} B$$

on transforme la matrice A en matrice unité et en même temps la matrice $\mathbb{1}$ en matrice A^{-1}. ceci est possible en faisant des opérations élémentaires sur les lignes de A pour la transformer en matrice unité et les mêmes opérations seront effectuées simultanément sur la matrice unité

$$(A \mid I)$$

$$\Downarrow$$

$$(\mathbb{I} \mid A^{-1})$$

M. ABID

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

L_i : ligne i

L_j : ligne j

$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ veut dire je remplace la ligne L_i par $L_i + \lambda L_j$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 + L_2$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Rq : $1 \times (-1) \times (-1) = 1$ det(B).

$L_1 \leftarrow L_1 + 4L_3$
$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -7 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow -L_2$
$L_3 \leftarrow -L_3$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

J. ABID

d'où

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie bien que

$$BB^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer le déterminant de cette matrice, on va créer des zéros sur la première colonne.

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_2 - L_1$

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

deux lignes identiques.

donc C n'est pas inversible.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -1 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ -1 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & +2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Essayer la méthode $D^{-1} = \frac{1}{\det(D)} \, {}^t com(D)$!!

M. ABIS

Pour le calcul de l'inverse il faut s'assurer que le det(D) ≠ 0.

Pour cela, nous allons appliquer l'astuce suivante, nous supposons que det(D) ≠ 0, et nous cherchons l'inverse par la méthode du pivot (de Gauss). Au cours du calcul, quand on aura une matrice triangulaire, on vérifie si det(D) = 0 ou det(D) ≠ 0. Cela nous permet de gagner du temps entre calculer le det(D) et en cherchant la matrice inverse.

pivot

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(on forme des zéros au-dessous du pivot 1)

$L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$
$L_4 \leftarrow L_4 + L_1$

pivot

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -13 & 4 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 10 & 0 & -4 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

on forme des zéros au-dessous du pivot (−8).

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$
$L_4 \leftarrow L_4 - \frac{5}{8} L_2$
$L_5 \leftarrow L_5 + \frac{3}{8} L_2$

MAJID

piv

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -8 & -13 & 4 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -3 & 4 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{57}{8} & -\frac{12}{8} & -\frac{15}{8} & -\frac{12}{8} & -\frac{5}{8} & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{39}{8} & -\frac{4}{8} & \frac{9}{8} & \frac{12}{8} & \frac{3}{8} & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)$$

$L_4 \leftarrow L_4 + \frac{19}{8} L_3$

$L_5 \leftarrow L_5 - \frac{13}{8} L_3$

pivot

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -8 & -13 & 4 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -3 & 4 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{64}{8} & -\frac{34}{8} & -\frac{12}{8} & \frac{14}{8} & \frac{19}{8} & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{56}{8} & \frac{22}{8} & \frac{12}{8} & -\frac{10}{8} & -\frac{13}{8} & 0 & 1
\end{array}\right)$$

$L_5 \leftarrow L_5 + \frac{7}{8} L_4$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -8 & -13 & 4 & 13 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -3 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{64}{8} & -\frac{34}{8} & -\frac{12}{8} & \frac{14}{8} & \frac{19}{8} & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{31}{32} & \frac{12}{8\cdot 8} & +\frac{18}{8\cdot 8} & \frac{29}{8\cdot 8} & \frac{7}{8} & 1
\end{array}\right)$$

$Det(D) = (1) \times (-8) \times (-3) \times \left(\frac{64}{8}\right) \times \left(\frac{31}{38}\right) = -186 \neq 0$

J. ABBID

21

Scanné avec CamScanner

Maintenant nous allons diagonaliser la matrice se trouvant à gauche, nous commençons par choisir $\left(-\frac{31}{32}\right)$ comme pivot et tous les facteurs au dessus doivent être égale à zéro.

$\frac{12}{64} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$

$\frac{18}{64} = \frac{9}{32}$

$L_1 \leftarrow L_1 + 0 L_5$

$L_2 \leftarrow L_2 + \frac{96}{31} L_5$

$L_3 \leftarrow L_3 + \frac{32}{31} L_5$

$L_4 \leftarrow L_4 + \frac{136}{31} L_5$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -13 & 4 & 0 & \frac{142}{31} & \frac{18}{31} & \frac{87}{62} & \frac{84}{31} & \frac{96}{31} \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 0 & -\frac{6}{31} & \frac{22}{31} & \frac{33}{62} & -\frac{28}{31} & -\frac{32}{31} \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & -\frac{72}{31} & \frac{16}{31} & \frac{12}{31} & -\frac{88}{31} & -\frac{136}{31} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{31}{32} & \frac{3}{16} & \frac{9}{32} & \frac{29}{64} & \frac{7}{8} & 1 \end{array}\right)$$

pivot

doivent être égale à zero.

$L_1 \leftarrow L_1 + 0 L_4$

$L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2} L_4$

$L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2} L_4$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -13 & 0 & 0 & \frac{178}{31} & \frac{50}{31} & \frac{75}{62} & \frac{128}{31} & \frac{164}{31} \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & \frac{30}{31} & \frac{14}{31} & \frac{21}{62} & \frac{16}{31} & \frac{36}{31} \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & -\frac{72}{31} & \frac{16}{31} & \frac{12}{31} & -\frac{88}{31} & -\frac{136}{31} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{31}{32} & \frac{3}{16} & \frac{9}{32} & \frac{29}{64} & \frac{7}{8} & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 + L_3$

$L_2 \leftarrow L_1 + \frac{13}{3} L_3$

n ABSID

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & \boxed{-2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{31} & -\frac{14}{31} & -\frac{21}{62} & -\frac{16}{31} & -\frac{36}{31} \\ 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & \frac{48}{31} & -\frac{32}{93} & -\frac{8}{31} & \frac{176}{93} & \frac{8}{31} \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & \frac{30}{31} & \frac{14}{31} & \frac{21}{62} & \frac{16}{31} & \frac{36}{31} \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & -\frac{72}{31} & \frac{16}{31} & \frac{12}{31} & -\frac{88}{31} & -\frac{136}{31} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{31}{32} & \frac{3}{16} & \frac{9}{32} & \frac{29}{64} & \frac{7}{8} & 1 \end{array}\right)$$

pivot

$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{4}L_2$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{11}{31} & -\frac{34}{93} & -\frac{17}{62} & -\frac{92}{93} & -\frac{38}{31} \\ 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & \frac{48}{31} & -\frac{32}{93} & -\frac{8}{31} & \frac{176}{93} & \frac{8}{31} \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & \frac{30}{31} & \frac{14}{31} & \frac{21}{62} & \frac{16}{31} & \frac{36}{31} \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & -\frac{72}{31} & \frac{16}{31} & \frac{12}{31} & -\frac{88}{31} & -\frac{136}{31} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{31}{32} & \frac{3}{16} & \frac{9}{32} & \frac{29}{64} & \frac{7}{8} & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1$

$L_2 \leftarrow -\frac{L_2}{8}$

$L_3 \leftarrow -\frac{L_3}{3}$

$L_4 \leftarrow \frac{L_4}{8}$

$L_5 \leftarrow -\frac{32}{3}L_5$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right.}_{I} \underbrace{\left|\begin{array}{ccccc} -\frac{11}{31} & -\frac{34}{93} & -\frac{17}{62} & -\frac{92}{93} & -\frac{38}{31} \\ -\frac{6}{31} & \frac{4}{93} & \frac{1}{31} & -\frac{22}{93} & -\frac{1}{31} \\ -\frac{10}{31} & -\frac{14}{93} & -\frac{7}{62} & -\frac{16}{93} & -\frac{12}{31} \\ -\frac{9}{31} & \frac{2}{31} & \frac{3}{62} & -\frac{11}{31} & -\frac{17}{31} \\ -\frac{6}{31} & -\frac{9}{31} & -\frac{29}{62} & -\frac{28}{31} & -\frac{32}{31} \end{array}\right)}_{D^{-1} \;\; B^{-1}}$$

Ex 10

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

* determiner des valeurs propres (v_p).

$$|A - \lambda \mathbb{I}| = 0 \qquad \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda \mathbb{I}| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 6 & -(1+\lambda) & 0 \\ -1 & -2 & -(1+\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3 - \lambda^2 + 12\lambda$$

$$|A - \lambda \mathbb{I}| = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 0, \ \lambda = 3, \ \lambda = -4.}$$

* Determination des vecteurs propres ($\vec{V_p}$.) associé à la v_p λ.

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un $\vec{V_p}$ de A ssi on a :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 6 & -(1+\lambda) & 0 \\ -1 & -2 & -(1+\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Voir cours et complet

$$\Rightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x + 2y + z = 0 \\ 6x - (1+\lambda)y + 0z = 0 \\ -x - 2y - (1+\lambda)z = 0 \end{cases}$$

Si $\lambda = 0$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 & (1) \\ 6x - y + 0z = 0 & (2) \\ -x - 2y - z = 0 & (3) \end{cases}$$

$\Rightarrow (1)$, $\Rightarrow y = 6x.$ } $z = -13x.$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 6x \\ -13x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -13 \end{pmatrix}$ est un $\vec{V_p}$ de A correspondant à la v_p $\lambda = 0$.

Si $\lambda = 3$.

$$\begin{cases} -2x + 2y + z = 0 & (1) \\ 6x - 4y + 0z = 0 & (2) \\ -x - 2y - 4z = 0 & (3) \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{y = \frac{3}{2}x}$

$(1) + (3)$ } $-3x - 3z = 0$ $\Rightarrow \boxed{z = -x}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{3}{2}x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un $\vec{V_p}$ de A correspond à la v_p $\lambda = 3$

Si $A = 4$

$$\begin{cases} 5x + 2y + z = 0 & ③ \\ 6x + 3y + 0z = 0 & ① \Rightarrow \boxed{y = -2x} \\ -x - 2y + 3z = 0 & ④ \end{cases} \quad y \Rightarrow z = -x.$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $A - \vec{V_p}$ de A correspondant à la vp $\lambda = 4$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$|B - \lambda \mathbb{I}| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & (1-\sqrt{2}-\lambda) \end{vmatrix} = (1-\sqrt{2}-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\sqrt{2}-\lambda)\left(-\lambda(2-\lambda) - 1\right).$$

$$= (1-\sqrt{2}-\lambda)\left(-2\lambda + \lambda^2 - 1\right).$$

$$|B - \lambda \mathbb{I}| = 0 \Rightarrow \lambda = 1+\sqrt{2}, \quad \underbrace{\lambda = 1-\sqrt{2}, \quad \lambda = 1-\sqrt{2}}_{\text{multiplicité} = 2}$$

les $\vec{V_p}$ de B =

Scanné avec CamScanner

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x+y+0z \\ x+0y+0z \\ 0x+0y+(1+\sqrt{2})z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} (i) \\ (j) \\ (k) \end{array} \begin{cases} (2-\lambda)x + y + 0z = 0 \\ x - \lambda y + 0z = 0 \\ 0x + 0y + ((1+\sqrt{2})-\lambda)z = 0. \end{cases}$$

Si $\lambda = 1+\sqrt{2}$

$$\begin{array}{l} (i) \\ (j) \\ (k) \end{array} \begin{cases} (1-\sqrt{2})x + y + 0z = 0 \\ x - (1+\sqrt{2})y + 0z = 0 \\ 0x + 0y + \cancel{2\sqrt{2}}\, z = 0. \end{cases}$$

$\Rightarrow y = (\sqrt{2}-1)x.$

$y = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} x.$

$\Rightarrow \boxed{z=0}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}-1} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}-1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}-1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est $\vec{V}_p$ de B correspondant à la v_p $1+\sqrt{2}$

Si $\lambda = 1-\sqrt{2}$

$$\begin{array}{l} i \\ j \\ k \end{array} \begin{cases} (1+\sqrt{2})x + y + 0z = 0 \\ x - (1-\sqrt{2})y + 0z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

$x = -\dfrac{y}{1+\sqrt{2}}$.

$z = z.$

J. ABID

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{1+\sqrt{2}} \\ y \\ z \end{pmatrix}$$; on peut choisir $z = 0$.
$y \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -\frac{1}{1+\sqrt{2}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} -\frac{1}{1+\sqrt{2}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ st - $\vec{V}_p$ de B correspondant à la vp $1-\sqrt{2}$

le 3e vecteur est également de la forme du 2e. cad

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{1+\sqrt{2}} \\ y \\ z \end{pmatrix}$$; pour le choix de z, nous

~~on peut~~ cherchons le calcul sur z pour que les 3 vecteurs soient linéairement indépendant cad

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}-1} & -\frac{1}{1+\sqrt{2}} & -\frac{y}{1+\sqrt{2}} \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix} = 2\sqrt{2}\, z \neq 0$$

on prend $z = 1$.
$\underline{\forall y}$

pour simplifier en prendre $y = 0$ et $z = \underline{1}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ st - le troisième vect propre de B correspondant
à $\lambda = 1 - \sqrt{2}$

M. ABBID

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Valeurs propres

$$|C - \lambda \mathbb{I}| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -(1+\lambda) \end{vmatrix} = -(1+\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(1+\lambda)(\lambda^2 - 1).$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 \qquad \lambda = -1 \qquad \lambda = -1$$

Vecteurs propres

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -(1+\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -\lambda x + y + 0z = 0 \\ x - \lambda y + 0z = 0 \\ -x + 0y - (1+\lambda) z = 0 \end{cases}$$

$\lambda = 1$

$$\begin{cases} -x + y + 0z = 0 \\ x - y + 0z = 0 \\ -x + 0y - 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow y = x = 2z. \\ \\ \Rightarrow z = \frac{1}{2}x. \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$\lambda = -1$

$$\begin{cases} x + y + 0z = 0 \\ x + y + 0z = 0 \\ -x + 0y + 0z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x = 0} \quad \Big| \Rightarrow y = 0 \quad \forall z$$

Donc ce cas nous aurons un seul $\vec{V_p}$.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 5 \\ \quad 2y - z = 3 \\ 2x - 4y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2x+4y+z \\ 2y - z \\ 2x - 4y + z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B}.$$

$$\begin{pmatrix} 2x+4y+z \\ 2y - z \\ 2x - 4y + z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = AX$$

$$\Rightarrow AX = B \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\det A = -16 \Rightarrow A^{-1} \exists$

$AX = B \Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{\mathbb{1}} . X = A^{-1}B \Rightarrow \mathbb{1}X = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$

$$X = A^{-1}B.$$

A. ABID

le calcul de l'inverse de A, nous donne.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/8 & 1/2 & 3/8 \\ 1/8 & 0 & -1/8 \\ 1/4 & -1 & -1/4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/8 & 1/2 & 3/8 \\ 1/8 & 0 & -1/8 \\ 1/4 & -1 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1/2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x = 5/2$, $y = \frac{1}{2}$ et $z = -2$.

Bon chance et Bon travail.