Donc $\mathrm{Im} f$ peut être obtenu à partir de $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$

cherchons si les 3 vect sont libres ?

$$\alpha f(e_1) + \beta f(e_2) + \gamma f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^4}$$

$$\alpha(1,-1,0,1) + \beta(0,1,1,1) + \gamma(1,0,1,2) = (0,0,0,0)$$

$$(\alpha+\gamma, -\alpha+\beta, \beta+\gamma, \alpha+\beta+2\gamma) = (0,0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+\gamma = 0 & \Rightarrow \gamma = -\alpha \\ -\alpha+\beta = 0 & \Rightarrow \beta = \alpha \\ \beta+\gamma = 0 & \beta+\gamma = \alpha+(-\alpha) = 0 \Rightarrow 0 \cdot \alpha = 0 \\ \alpha+\beta+2\gamma = 0 & \alpha+\beta+2\gamma = \alpha+\alpha-2\alpha = 0 \cdot \alpha = 0. \end{cases} \qquad \underline{\underline{\forall \alpha}}$$

$\Rightarrow \{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ syst lié

en effet

$$\alpha f(e_1) + \beta f(e_2) + \gamma f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^4}$$

$$\alpha f(e_1) + \alpha f(e_2) - \alpha f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^4} \qquad \forall \alpha.$$

$$\alpha(f(e_1) + f(e_2) - f(e_3)) = 0_{\mathbb{R}^4}$$

$$f(e_1) + f(e_2) - f(e_3) = 0_{\mathbb{R}^4} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $f(e_3) = f(e_1) + f(e_2)$ [voir matrice : 3<sup></sup>e colonne = 1ère colonne + 2e colonne]

$\Rightarrow$ $\mathrm{Im} f = \langle f(e_1), f(e_2) \rangle$

on vérifie que $\alpha f(e_1) + \beta f(e_2) = 0_{\mathbb{R}^4} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = \beta = 0}}$

donc $\{f(e_1), f(e_2)\}$ est bien base de $\underline{\mathrm{Im} f}$

$\dim \mathrm{Im} f = 2 < \dim \mathbb{R}^4$

c'est pas appli surjective

M. ABID