2) $\dim(E) = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f$.

$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim \mathrm{Ker} f + 2$

$3 = \dim \mathrm{Ker} f + 2 \Rightarrow \underline{\dim \mathrm{Ker} f = 1}$

donc la base de Ker f doit être formée d'un seul vect.

$\mathrm{Ker} f = \{ u \in \mathbb{R}^3 / f(u) = 0_{\mathbb{R}^4} \}$

$\Rightarrow f(x,y,z) = (0,0,0,0) \Rightarrow (x+z, y-x, z+y, x+y+2z) = (0,0,0,0)$

$\begin{cases} x+z=0 \\ y-x=0 \\ z+y=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$ (Voir ci-dessus) $\Rightarrow -z = y = x$

$f(u) = 0_{\mathbb{R}^4} \Rightarrow u = (x,y,z) = (x, x, -x)$ $\forall x$

$= x(1,1,-1)$.

$\Rightarrow$ ~~Im f~~ $\boxed{\mathrm{Ker} f = \langle (1,1,-1) \rangle}$ $\dim \mathrm{Ker} f = 1$

3) $\dim(\mathrm{Ker} f) = 1 \neq 0$ ou $\mathrm{Ker} f \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ $\Rightarrow$ f n'est pas injective

ou $\begin{cases} \dim(\mathrm{Im} f) = 2 \neq 4 \\ \mathrm{Im} f \neq \mathbb{R}^4 \end{cases}$ $\Rightarrow$ f n'est pas surjective.

<u>Exercice 5</u>

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ Voir chapitre 3

$u = (x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z) = v = (X,Y,Z)$.

$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow Q = HP$

$P = u^t$. $Q = v^t = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$.

M. ABID